Mohammad S. Alkousa
PhD in mathematics (MIPT)

Real Infinite Series Problems and Solutions

2023

المحتويات

مقدمة

تَمَّ استخدام المُتَسَلْسِلَات غير المُنتَهِيَة، وبشكل أساسي، في حساب التَّفاضُل والتَّكامُل، لذلك يصعب تَتَبُّع مسارها التَّاريخي الدَّقيق. إلا أنَّه يعود أول ذِكْرٍ لمُتَسَلْسِلَة غير مُنتَهِيَة إلى العصور القديمة. ففي ذلك الوقت كانت محاولة فهم قضية أنَّ مجموع عدد غير منته من الأعداد يساوي عددًا محدودًا، تشكل تحدّيًا فلسفيًّا كبيرًا، وعائقًا في طريق فَهْمِ اللَّانهاية. تَمَّ بعد ذلك تطوير نظرية المُتَسَلْسِلَات غير المُنتَهِيَة واستخدامها في حل العديد من المسائل المهمة التي استعصت على الحل باستخدام أي مفهوم آخر. إذ يُعتبَر أرخميدس[1] أول عالم رياضيات يُطبِّق مفهوم المُتَسَلْسِلَة غير المُنتَهِيَة لحساب المساحة الواقعة تحت قوس القطع المكافئ، باستخدام طريقة الاستِنْفَاد[2]. وبعد ذلك بعدة قرون طرح العالم الهندي مَادْهَافَا[3] فكرة نشر الدَّوال بمُتَسَلْسِلَات غير مُنتَهِيَة، الأمر الذي أدَّى فيما بعد إلى تمهيد الطريق لعدة مفاهيم حديثة مثل مُتَسَلْسِلَة القوى، مُتَسَلْسِلَتَي تَايلُورْ[4] وماكلوران[5]، والتقريب بالكسور المستمرة غير

---

[1] Archimedes، (212-287 قبل الميلاد). عالم رياضيات وفيزيائي ومخترع إغريقي. يعدُّ من أعظم علماء الرياضيات في العصور القديمة. له إسهامات مُعتبرة في الهندسة، وضع أُسُسَ علم التوازن.

[2] method of exhaustion. طريقة تستعمل لحساب المساحات أو الحجوم، وذلك بإيجاد مُتَتَالِيَة مُتزَايِدَة (أو مُتنَاقِصَة) من المجموعات المعلومة المساحة والتي مساحاتها أصغر (أو أكبر) من المساحة المطلوبة، لأنَّ المنطقة المحصورة بين حدود المجموعات وحدود المساحة الأصلية تقترب من الصفر "تُستَنفَد".

[3] Madhava of Sangamagrama، مَادْهَافَا سانغماغراما (1340-1425). عالم رياضيات وفلك هندي. قدَّم إسهامات كبيرة في دراسة المُتَسَلْسِلَات غير المُنتَهِيَة، وحساب التَّفاضُل والتَّكامُل، والمثلثات، والهندسة، والجبر.

[4] Brook Taylor، بْرُوكْ تَايلُورْ (1685-1731). عالم إنكليزي عمل في التحليل الرياضي والهندسة والفلسفة والرسم، وهو مؤسس حُسْبَانَ الصَّغائِر (infinitesimal calculus). وبسبب عدم نشره لنتائجه، نُسِب بعضها إلى يوهان برنولي. وقد ترأَّس تَايلُورْ لجنة من المُحكّمين للفصل بين الدَّعْوَيَيْن اللتين تقدَّم بهما نيوتن ولايبْنِتْز، اللذين يؤكد كل منهما أنَّه مبتكر حساب التَّفاضُل والتَّكامُل (حُسْبَانُ المتغيرات).

[5] Colin Maclaurin، كولِن ماكلوران (1698-1746). عالم رياضيات وفيزيائي اسكتلندي. طوَّر عمل نيوتن في هذين المجالين. دخل جامعة غلاسكو وعمره 11 سنة، وعُيِّن أستاذًا للرياضيات وعمره 19 سنة، وانتُخِب عضوًا في الجمعية

المُنتَهِيَة. ويعتبر مَادْهَاڤَا أول عالم رياضيات، في القرن الرابع عشر، يدرس مفهوم التَّقارُب، إذ إنَّه قدَّم اختبارًا لأجل ذلك، تمَّ تطويره فيما بعد من قِبَل تلامذته في مدرسة كِيلارا[6]. كانت الخطوة المهمة، بعد ذلك، قد تمَّت من قِبَل العالِم الاسكتلندي غريغوري[7]. إذ تمكن غريغوري من فهم التَّفاضُل والتَّكامُل قبل صياغته من قِبَل نيوتن[8] ولايبْنِتْز[9] لمستوى مكَّنه من تقديم مفهومَي التَّقارُب والتَّباعُد وإيجاد المُتَسَلْسِلَة غير المُنتَهِيَة للدَّالَّة arctan، كما تمكَّن من اكتشاف المُتَسَلْسِلات غير المُنتَهِيَة للدوال: tan و sec و arcsec، ودوال أخرى أيضًا. كما تمكَّن نيوتن ولايبْنِتْز، بعد تطويرهما، حساب التَّفاضُل والتَّكامُل، من تحقيق العديد من الاكتشافات في نظرية المُتَسَلْسِلات غير المُنتَهِيَة، وتمكَّن أُويْلَر[10] من إيجاد مجموع مقلوب مربعات الأعداد الطبيعية، أي إيجاد: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$، والذي يساوي $\frac{\pi^2}{6}$، الأمر الذي عجز عنه لايبْنِتْز. في أوروبا، بدأ غَاوْص[11] في تطوير اختبارات التَّقارُب للمُتَسَلْسِلاتِ العَدَدِيَّة غير المُنتَهِيَة. وأثبت كُوشِي[12] أنَّ جداء متسلسلتين متقاربتين ليس بالضرورة

الملكية وعمره 21 سنة، ورُقِّي إلى كرسي الأستاذيَّة وعمره 27 سنة.

[6] Kerala school، مدرسة هندية لعلوم الفلك والرياضيات. أسسها مَادْهَاڤَا في مدينة كِيلارا.

[7] James Gregory، جيمس غريغوري (1638-1675). عالم رياضيات اسكتلندي، درس في إيطاليا. كان أول من فرَّق بين المُتَسَلْسِلات المُتقارِبَة والمُتَباعِدَة.

[8] Sir Isaac Newton، السِّير إسحاق نيوتن (1685-1731). يعدُّ أحد أعظم علماء الرياضيات على مرِّ العصور. ابتكر هو ولايبْنِتْز -كلٌّ منهما على حدة- حساب التَّفاضُل والتَّكامُل. تعود شهرته لاكتشاف قانون الجاذبية، ولإسهاماته الكبرى في الجبر والهندسة التحليلية ولوضع مبادئ علم المعادلات.

[9] Gottfried Wilhelm Leibniz، غوتفريد وِلْهِلْم لايبْنِتْز (1646-1716). وُلد في ألمانيا. مُنح لقب دكتور في القانون عام 1667، وعمل في القضايا القانونية، وبخاصة، ما تعلَّق منها بالسياسة الدولية. ابتكر حساب التَّفاضُل والتَّكامُل (بشكل مستقل عن نيوتن)، وقدَّم كثيرًا من الرموز الرياضيَّة التي نستعملها في وقتنا الحاضر.

[10] Leonhard Euler، ليونارد أُويْلَر (1707-1783). عالم رياضيات وفيزياء سويسري المولد. يعدُّ أحد أعظم علماء الرياضيات عبر التاريخ. نشر أكثر من 400 بحث علمي تناول فيها فروع الرياضيات كافة، ثم ظهرت بعد وفاته 350 بحثًا إضافيًا. واصلَ عمله حتى بعد فقْد بصره قبل 17 عامًا من وفاته، حقَّق خلالها أعظم إنجازاته العلمية.

[11] Carl Friedrich Gauss، كارْل فريدرِك غَاوْص (1777-1855). عالمٌ رياضي وفلكي ألماني، يُعدُّ من أكثر الرياضيين تأثيرًا وأغزرهم إنتاجًا. ابتكر في رسالته لنيل درجة الدكتوراة، عام 1799، مفهوم العدد العقدي.

[12] Augustin-Louis Cauchy، أُوغُسْطين لويس كُوشِي (1789-1857). عالم رياضيات وفيزياء فرنسي، كان لأعماله التي تميَّزت بالدقة تأثير كبير في معظم فروع الرياضيات. وقد تميَّز بوضعه أسس التحليل الرياضي الحديث بلغة النهايات والاستمرار، وطوَّر نظرية الدَّوال العُقَدِيَّة (المُرَكَّبة). نشر 789 بحثًا في التكاملات المحدَّدة وانتشار الموجات والهندسة

أن يكون متقاربًا، وبدأ باكتشاف اختبارات ذات فعالية في تحديد التَّقارُب والتَّباعُد لنماذج خاصة من المُتَسَلْسِلَات العَدَدِيَّة غير المُنتَهِيَة، الأمر الذي قام به أيضًا رَابْ[13]، ودومورغان[14]، وبِرْتْرَان[15]، وغيرهم الكثير. بدأ كومِر[16] أيضًا في تطوير اختبارات عامة لدراسة التَّقارُب والتَّباعُد، وبعد ذلك قام ڤَايِرشْتْرَاس[17]، وأيزنشتاين[18]، وغيرهم الكثير، بهذا الأمر أيضًا.

إنَّ للمُتَسَلْسِلَات وكذلك الجداءات العَدَدِيَّة الحَقيقيَّة اللانهائيَّة أهمية كبيرة في الرياضيات بشكل عام، وفي حساب التَّفاضُل والتَّكامُل والتحليل الرياضي بشكل خاص. إذ إنَّها تُعْتَبَر إحدى اللَّبِنَات الأساسية في التحليل الرياضي، فهي تمثِّل بنية رياضية مثيرة للاهتمام، يرتكز عليها الكثير من المفاهيم في العديد من حقول العلوم، مثل الفيزياء والإحصاء وعلوم الكمبيوتر، والاقتصاد، وغيرها الكثير. ولقد أُثْرِيَت المكتبة العربية بالعديد من الكتب والمطبوعات التي تناولت مفهومي المُتَسَلْسِلَات والجداءات العَدَدِيَّة، من الناحية النظرية والعملية، إما لوحدها منفردة، أو ضمن فصل خاص ضمن مواضيع التحليل الرياضي أو حساب التَّفاضُل والتَّكامُل. إلا أنَّ المُحتوى العربي، في معظمه، كان أكثر مَيْلًا للجانب النظري، وعرض المبرهنات والنتائج المتعلقة بمفاهيم التَّقارُب والتَّباعُد، والاختبارات المختلفة الخاصة في تحديد التَّقارُب والتَّباعُد، وطرق حساب مجموع بعض الأشكال الخاصة لمتسلسلات أو جداءات عَدَدِيَّة مُتَقَارِبَة. وانطلاقًا من أهمية فهم الرياضيات من خلال ممارستها، والممارسة لا تكون إلا بحل التمارين والمسائل، وبذل الجهد في سبيل ذلك، نقدم في هذا الكتاب خُلَاصَة نظرية،

ونظرية الأعداد.

[13] Joseph Ludwig Raabe، جوزيف لُودْڤِيغ رَابْ (1801-1859). عالم سويسري، اهتم بالتحليل الرياضي.

[14] Augustus De Morgan، أَغُسْطُس دومورْغان (1806-1871). عالم رياضيات انكليزي، هندي المولد، له دور بارز في تأسيس المنطق الرمزي. ويعود إليه الفضل في تعميم مفهوم الجبر، وتوضيح مفهوم الاستقراء الرياضي، وتقديم شرحٍ واضح لمنطق أرسطو التقليدي. كان أول رئيس للجمعية الرياضية اللُّنْدُنيَّة.

[15] Joseph Louis Francois Bertrand، جوزيف لُوي فرانسوا بِرْتْرَان (1822-1903). عالم رياضيات فرنسي، له إسهامات في الهندسة والتحليل الرياضي.

[16] Ernst Eduard Kummer، إِدْوارْد إِرْنِست كومِرْ (1810-1893). عالم رياضيات ألماني، اهتم بالتحليل والهندسة ونظرية الأعداد. وهو مؤسس نظرية الحقول.

[17] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass، كارْل ثِيودور وِلْيَم ڤَايِرشْتْرَاس (1815-1897). عالم رياضيات ألماني. أسهم، بشكل خاص، في نظرية المتغيرات العقدية، ومتسلسلات القوى، والدوال الناقصيَّة (الإهليلَجيَّة).

[18] Ferdinand Gotthold Max Eisenstein، ماكس غُوتهُولْد فِرديناند أَيزِنْشْتاين (1823-1852). عالم رياضيات ألماني. له إسهامات في نظرية الأعداد والجبر والتحليل. يُنسَب إليه معيار عدم قابليَّة الاختزال.

تشكل أهم الأفكار والمبرهنات والنتائج والاختبارات المتعلقة بالمُتَسَلْسِلَاتِ والجداءات العَدَدِيَّة والتي تساعد في تحديد طبيعتها، من حيث كونها مُتَقارِبَة أم مُتَباعِدَة، مع أمثلة توضيحيَّة لكل فكرة. كما ونعرض ثلاث مجموعات متنوعة من التمارين، تشمل الأفكار النظريَّة التي تَمَّ عرضها والتوقف عندها. وتمَّ عرض الحل التفصيلي في بعض الأحيان، والمُقتَضب أحيانًا أخرى، لهذه التمارين في فصول مُنْفَرِدة.

وتجدر الإشارة إلى أنَّه لا يوجد عمل دون نقص أو عيوب، إذ إنَّ الحل المعروض للتمارين الواردة في هذا الكتاب ليس الأفضل والأَمْثَل. لذلك يُنصَح لَدَى التَّعامُل مع التمارين المَطْروحَة في هذا الكتاب، أن يتم بذل الجهد الشخصي أولًا، دون النظر في الحل المقترح، فمن الممكن أن يتم حل التمرين بطريقة أُخْرَى أفضل من تلك المذكورة في الكتاب، فعظيم الامتنان لمن يتفضَّل تكرُّمًا بإرسال الملاحظات أو الاقتراحات أو أيَّة فكرة ترقى بالكتاب نحو الأفضل، على الإيميل: mohammad.alkousa@phystech.edu. إذ سيتم، بهدف السعي نحو الأفضل، تحديث محتوى الكتاب، وبشكل خاص قائمة التمارين، إما زيادة لتمارين تشمل أفكارًا مُحفِّزَةً ومُثيرَةً للاهتمام، وذات مستوى أعلى من تلك التي تَمَّ تناولها الآن في هذا الإصدار للكتاب، أو حذفًا لما هو غير مُجْدٍ أو ليس هناك من داعٍ لذكره، أو إضافة لطرق أفضل للحل.

وأخيرًا وليس آخرًا، نشكر كل من قدم المساعدة لإخراج هذا العمل بصورته الحالية، ونخُصُّ بالشكر الأساتذة الكرام: الأستاذ الدكتور فوزي دنَّان، الأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل، الأستاذ الدكتور معاذ عبد المجيد، الأستاذ الدكتور قصي كنفاني، الدكتور محمد عمايري والأستاذ عمر الحافظ لتَفضُّلِهِم بالاطلاع على مسودة الكتاب والملاحظات التي قدَّموها، والتي أسهمت بشكل كبير في جعل الكتاب أفضل ممَّا كان عليه. وعلى أمل أن يكون هذا الكتاب ذا فائدة لطلاب الجامعات الذين يحتاجون مفهومَي المُتَسَلْسِلَات والجداءات العَدَدِيَّة الحَقيقِيَّة غير المُنتَهِيَة كأداة أساسيَّة في مسيرتهم الدراسية وتحصيلهم العلمي، راجين الدعاء، والله المُوفِّق.

01.07.2023

الفصل 1

المُتَسَلْسِلَات العَدَدِيَّة الحَقيقِيَّة، خُلاصَة نظريَّة

في هذا الفصل سيتمُّ عرض خُلاصَة مُقتضبَة لجزء يشمل بعض الأفكار النظريَّة التي تخصُّ مفهوم المُتَسَلْسِلَات العَدَدِيَّة الحَقيقِيَّة اللَّانهائية. إذ سيتمُّ أولًا، عرض تعريف التَّقارُب بدلالة مُتَتَالِيَة المَجَامِيْع الجُزئيَّة المرتبطة بالمُتَسَلْسِلَة العَدَدِيَّة، بشكلها العام، وتعريف المجموع للمُتَسَلْسِلَة المُتَقارِبَة، مع أمثلة لمُتَسَلْسِلَات هامة مثل الهَنَدَسِيَّة والتلِسْكُوبِيَّة. في القسم الثاني من هذا الفصل، سيتم عرض الأفكار والملاحظات والنتائج المُتعلّقة بمَفهُومَي التَّقارُب والتَّباعُد للمُتَسَلسِلَات العَدَدِيَّة ذات الحدود غير السالبة. إذ سيتمُّ عرض بعض اختبارات التَّقارُب المشهورة لهذه المُتَسَلْسِلَات، منها على سبيل المثال: اختبارَي المُقارَنة الأول[1] والثاني[2]، اختبار كُوشِي التَّكامُلِي[3]، اختبار دَالامْبِيْر[4]، اختبار كُوشِي[5]،

[1] First comparison test

[2] Second comparison test

[3] Cauchy's Integral test

[4] d'Alembert's test. يدعى اختبار دَالامْبِيْر أحيانًا اختبار النسبة (Ratio test). اكتُشِف هذا الاختبار من قِبَل جَان لُو رُونْد دَالامْبِيْر (1717-1783)، Jean Le Rond d'Alembert، ونُشِرَ عام 1768، في بحثه:

J. d'Alembert: Reflexions fur les Suites divergentes ou convergentes, in: J. d'Alembert (ed.), Opuscules Mathématiques V5: ou Mémoires sur Différens Sujets de Géométrie, de Méchanique, etc., 1768, p. 171–183.

كان دَالامْبِيْر عالم رياضيات ورجل قانون فرنسي، عمل في الميكانيك (مبدأ دَالامْبِيْر لقوى القصور الذاتي) وميكانيك السوائل. عرَّف المشتق على أنَّه نهاية لنسبة الفرق، ساهم دَالامْبِيْر في إثبات النظرية الأساسية للجبر، والتي غالبًا ما يتم تسميتها باسمه في اللغة الفرنسية. بالإضافة إلى ذلك، نشر مقالات في علم الفلك، والفلسفة، وترجم مخطوطات قديمة من اللاتينية إلى الفرنسية.

[5] Cauchy's test. يدعى اختبار كُوشِي أحيانًا اختبار الجذر (Root test).

اختبار رَابْ[6]، واختبار بِرْتْرَان[7]. وفي القسم الثالث سيتم التطرق للمُتَسَلسِلَات العَدَدِيَّة المُتَنَاوِبَة[8] واختبار التَّقارُب الخاص بهذا النموذج من المُتَسَلْسِلَات (اختبار لايبِنْتِز[9]). في القسم الرابع سيتم التطرق للمُتَسَلسِلَات الكيفيَّة (إشارات حدودها كيفية، موجبة وسالبة)، إذ سيتم عرض مفهومَي التَّقارُب بِالإِطْلَاق والتَّقارُب الشرطي، واختبارات التَّقارُب المُتعلّقة بالتَّقارُب بِالإِطْلَاق. أمَّا في القسم الخامس سيتم بالتفصيل دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)q^n$، حيث $P(n)$ كثيرة حدود بـ n و $q \in \mathbb{R}^*$. وفي القسم السادس سيتم عرض دراسة تَفصِيلِيَّة لمفهوم المُتَسَلْسِلَات العشريَّة والمُتَسَلْسِلَات العشريَّة الدَّورِيَّة. إذ تكمن أهمية المُتَسَلْسِلَات العشريَّة في التَّقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الحَقِيقِيَّة (إذ إنَّ لكل عدد حقيقي يوجد مُتَسَلْسِلَة عشريَّة وحيدة مُتَقَارِبَة منه)، كما أنَّ كل مُتَسَلْسِلَة عشريَّة دوريَّة هي مُتَسَلْسِلَة مُتَقَارِبَة من عدد كسري (عادي). وفي القسم السابع، والأخير، سيتم تناول مفهوم العبارات المُقَارِبَة واستخداماته الواسعة والمفيدة في دراسة طبيعة العديد من المُتَسَلْسِلَات العَدَدِيَّة والتي يصعب بشكل كبير دراسة طبيعتها لدى التطبيق المباشر لاختبارات التَّقارُب التي يتم استخدامها عادة لاختبار تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات العَدَدِيَّة.

1.1 مُتَتَالِيَة المَجامِيع الجُزئِيَّة، التَّقارُب والتَّباعُد

1.1.1 تعاريف أساسيَّة

تعاريف 1:

(1) لتكن $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$، مُتَتَالِيَة عَدَدِيَّة حقيقية. نسمي المجموع:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

والذي سنرمز له اختصارًا بالرمز $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$، مُتَسَلْسِلَة عَدَدِيَّة حقيقية لانهائية. ونسمي الأعداد $a_1, a_2, \ldots$ حدود المُتَسَلْسِلَة، و a_n الحد العام لها.

[6] Raabe test. يدعى اختبار رَابْ أحيانًا اختبار رَابْ-دوهامل (Raabe–Duhamel's test).
[7] Bertrand's test
[8] alternating series
[9] Leibniz's test

(2) ندعو المُتَتالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، حيث:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

مُتتَالِيَة المَجامِيعْ الجُزْئِيَّة للمتَسلْسِلة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(3) نقول إن المُتَسلْسِلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتقارِبَة إذا كانت مُتَتالِيَة مجاميعها الجُزْئيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ مُتَقارِبَة. وخلاف ذلك نقول إن المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَباعِدَة.

(4) إذا كان $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$، فإنَّنا نقول إن s هو مجموع المُتَسلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، ونكتب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

تجدر الإشارة إلى أنَّه يوجد تعريفات عديدة للمُتَسَلْسِلَة العَدَدِيَّة، نذكر منها على سبيل المثال [2]، [10]: لتكن $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ مُتَتَالِيَة عَددِيَّة غير مُنتَهِيَة، وليكن

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

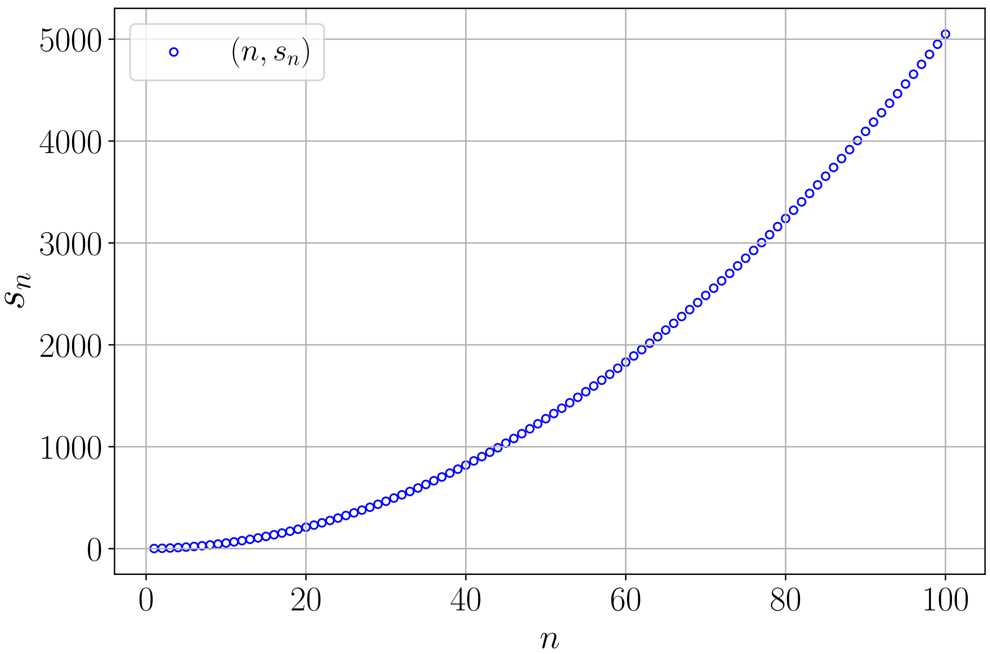
لأجل كل عدد طبيعي $n \geqslant 1$، ندعو الزوج المرتب $(\{a_n\}_{n\geqslant 1}, \{s_n\}_{n\geqslant 1})$ مُتَسَلْسِلَة عَددِيَّة غير مُنتَهِيَة. وندعو العدد a_n الحد ذو المرتبة n، والعدد s_n المجموع الجُزْئِي ذو المرتبة n للمتَسلْسِلَة غير المُنتَهِيَة. ويمكن لتمثيل المُتَسَلْسِلَة العَدَدِيَّة غير المُنتَهِيَة، بدلًا من الترميز بدلالة أزواج مرتبة من المُتَتَالِيَات، استخدام الرمز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أو $a_1 + a_2 + \ldots$. ومن هنا يجب الانتباه إلى أنَّ الرمز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، يشير لمتتاليتين عدديتين، الأولى مُتتالِيَة الحدود $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$، والثانية مُتتَالِيَة المَجاميْع الجُزْئيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ للمُتَسلْسِلَة العَدَدِيَّة.

مثال 1:

لتكن المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} n$. الحد العام s_n لمُتَتالِيَة المَجامِيعْ الجُزْئيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ له الشكل:

$$s_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

نلاحظ أنَّ: $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (انظر الشكل 1،1). ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} n$ مُتَباعِدَة.



شكل 1.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$.

مثال 2:

لتكن المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$، والتي يمكن كتابة حَدِّهَا العام بالشكل:

$$a_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+1},$$

حيث A و B ثوابت يُطلب تحديدها. وهذا يمكن بشكل عام بتوحيد المقامات وحذفها، فنجد:

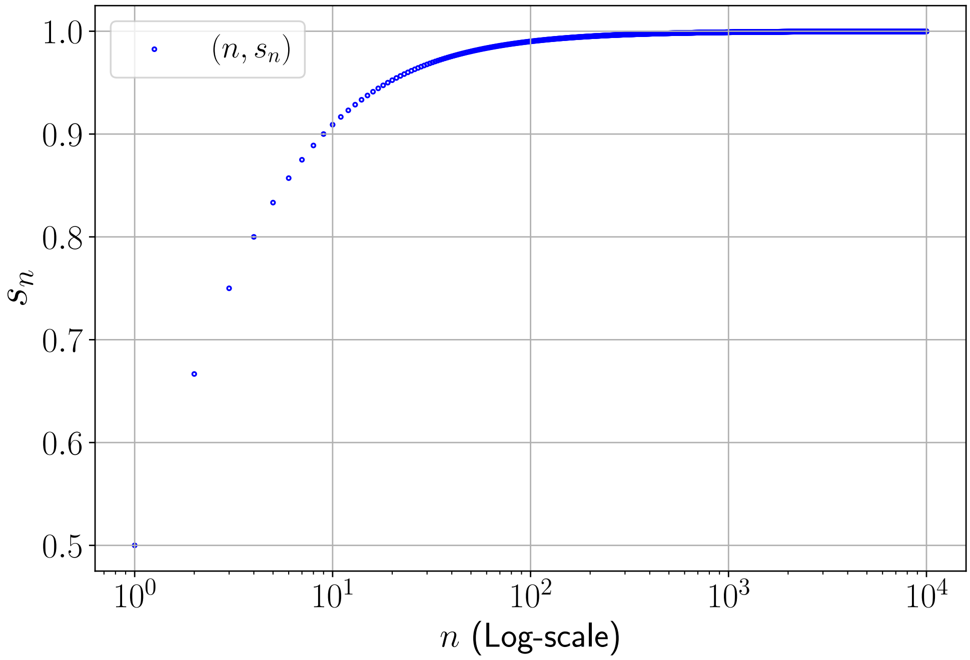
$$A(n+1) - Bn = 1 \Longrightarrow (A-B)n + A = 1 \Longrightarrow A = 1, B = 1.$$

ومنه الحد العام s_n، لمتتالِيَة المَجامِيع الجُزئيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، له الشكل:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

نلاحظ أنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ مُتقارِبَة، ومجموعها $s = 1$ (انظر الشكل

2.1). أي: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$.



شكل 2.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{10^4} \approx 0.9999$.

وبشكل عام لدراسة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+r)}$، حيث r عدد صحيح موجب، نلاحظ أنَّ الحد العام s_n، لمُتتَالِيَة المَجَامِيْع الجُزْئِيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، له الشكل:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+r-1)(k+r)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r} \cdot \frac{k+r-k}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+r-1)(k+r)} \\
&= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+r)-k}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+r-1)(k+r)} \\
&= \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cancel{k+r}}{k(k+1)\cdots(k+r-1)\cancel{(k+r)}} - \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)(k+2)\cdots(k+r)} \right) \\
&= \frac{1}{r} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+r-1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+r)} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+r-1)} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+r-1)}\right)\\
&= \frac{1}{r}\Bigg(\frac{1}{1\cdot 2\cdots r} + \cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+r-1)}}\\
&\qquad - \cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+r-1)}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}\Bigg)\\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}\right).
\end{aligned}
$$

حيث $r! = r\cdot(r-1)\cdots 2\cdot 1$ هي عَامِلِيُّ (factorial) (أو مضروب) العدد r مع اصْطِلاح أنَّ $0! = 1$. ومنه نجد أنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{r\cdot r!}$، وبالتالي فإنَّ:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r)} = \frac{1}{r\cdot r!}. \qquad (\clubsuit)
$$

وبطريقة مُمَاثِلَة يمكن إثبات أنَّه إذا كان r و m عدَدَين صَحِيحَين مُوجبَين فإنَّ:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)(n+2m)\cdots(n+rm)} = \frac{1}{rm}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k(k+m)\cdots(k+(r-1)m)}.
$$

(تحقَّق من ذلك!). لاحظ أنَّه بوضع $m=1$ فإننا نحصل على المجموع $(\clubsuit)$.

ملاحظة 1:

كل مُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ يمكن التعبير عن حَدِّهَا العام a_n بالشكل:

$$
a_n = b_n - b_{n+1}; \qquad \forall n \geqslant 1,
$$

تدعى مُتَسَلْسِلَة تلسْكُوبِيَّة (Telescoping series). ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المذكورة في المثال 2، هي مُتَسَلْسِلَة تلسْكُوبِيَّة، حيث أنَّه لدينا $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$، ومنه يكون $b_n = \frac{1}{n}$. سلوك مثل هذه المُتَسَلْسِلَات يُعبِّر عنه بالمبرهنة الآتية.

مبرهنة 1:

لتكن $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ و $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ مُتتَالِيَتيْن حَقيقيَّتين، بحيث:

$$a_n = b_n - b_{n+1}; \qquad \forall n \geqslant 1.$$

الشرط اللازم والكافي لتقارُب المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن تَتَقَارَب المُتَتَالِيَة $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$. ويكون:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

لاحظ أنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1}$.

بالعودة للمثال 2، والاستفادة من المبرهنة 1. نلاحظ أنَّ المُتَتَالِيَة $\{b_n = \frac{1}{n}\}_{n\geqslant 1}$ مُتَقَارِبَة، إذ إنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ تِلسْكُوبِيَّة مُتَقَارِبَة، ومجموعها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 1 - 0 = 1.$$

ملاحظة 2:

إذا كان $p \geqslant 0$، عدداً صحيحاً غير سالب، فإنَّنا نُعرِّف الرَّمز $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ على أنَّه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$، حيث $b_n = a_{p+n-1}$. ويمكن أن نبرهن، وبسهولة، أنَّ المُتَسَلْسِلَتيْن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَتَان معًا أو مُتَبَاعِدَتَان معًا. في الحقيقة، ليكن:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad t_n = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{p+n-1}.$$

فإذا كان: $p = 0$، فإنَّنا نجد أنَّ: $t_{n+1} = a_0 + s_n$. ومنه إذا كان: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$، فإنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a_0 + s$. وهذا يعني أنَّه إذا كانت المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ ستكون مُتَقَارِبَة أيضًا. وبالعكس، إذا كان: $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = T$، فإنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = T - a_0$. أي أنَّه إذا كانت المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ستكون مُتَقَارِبَة أيضًا. وكذلك الأمر إذا كان: $p = 1$، إذ إنَّه في هذه الحالة يكون: $s_n = t_n$.
وأخيرًا، إذا كان: $p > 1$، فإنَّ: $t_n = s_{n+p-1} - s_{p-1}$. ومنه فإنَّ المُتَتَالِيَتيْن $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ و $\{t_n\}_{n\geqslant 1}$ في هذه الحالة (أي $p > 1$)، مُتَقَارِبَتَان معًا أو مُتَبَاعِدَتَان معًا. ويعبَّر عن هذا، عادة، بالقول:

إنَّ حذف (أو إضافة) عدد منته من حدود (أو إلى) بداية مُتَسَلْسِلَة، لا يؤثر على تَقارُبِها أو تَباعُدِها.

2.1.1 المُتَسَلْسِلَة الهَندسِيَّة

مثال 3: المُتَسَلْسِلَة الهَندسِيَّة

المُتَسَلْسِلَة الهَندسِيَّة، التي حَدُّهَا الأول $a \neq 0$، وأساسها $q \neq 0$، لها الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots.$$

لأجل هذه المُتَسَلْسِلَة، الحد العام s_n، لمُتَتَالِيَة المَجاميْع الجُزئِيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، يكون بالشكل:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

نميز الحالات الآتية:

(1) إذا كان $|q| < 1$. فإنَّه يكون: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

فالمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ في هذه الحالة تكون مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $\frac{a}{1-q}$.

(2) إذا كان $|q| > 1$، أي: $q \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. فإنَّ النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ إمَّا أن تكون غير موجودة (عندما $q < -1$، لأنَّ q^n تصبح عندئذ مُتناوِبَة)، أو تساوي $+\infty$ (عندما $q > 1$).

ومنه فإنَّ النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ إمَّا أن تكون غير موجودة (عندما $q < -1$)، أو تساوي $+\infty$ (عندما $q > 1$ و $a > 0$)، أو تساوي $-\infty$ (عندما $q > 1$ و $a < 0$). ومنه فإنَّ المُتَتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ ستكون مُتَباعِدَة، والمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ مُتَباعِدَة في هذه الحالة (أي عندما $|q| > 1$).

(3) إذا كان $q = 1$. فإنَّ:

$$s_n = a + a + \ldots + a = na$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$. والمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ تكون مُتَباعِدَة في هذه الحالة أيضًا.

(4) إذا كان $q=-1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ الهَندسِيَّة المَدرُوسَة تأخذ الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a = -a+a-a+a-\dots$$

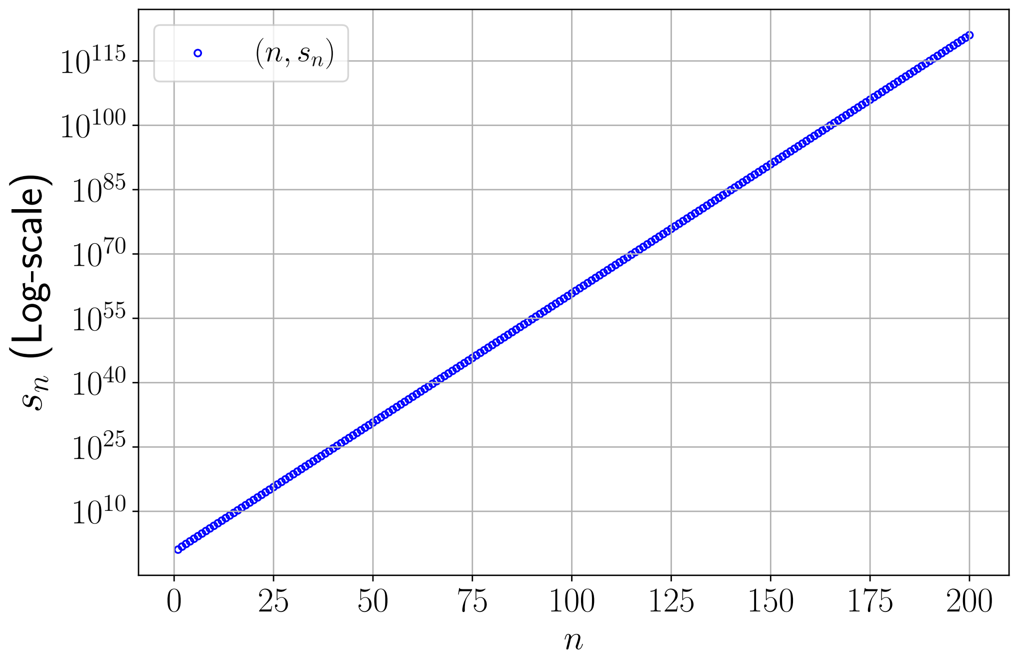
ومنه يكون:

$$s_1=-a, s_2=-a+a=0, s_3=-a+a-a=-a, s_4=-a+a-a+a=0, \dots$$

وهذا يعني أنَّ المُتَتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ تَتأَرجَح بين العددين المختلفين $-a$ و 0، فهي مُتَبَاعِدَة، والمُتَسَلْسِلَة المَدرُوسَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ تكون متباعِدَة أيضًا في هذه الحالة.

مثال 4:

المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3(4^n)$ مُتَبَاعِدَة. إذ إنَّها هَندسِيَّة، أساسها $q=4>1$، انظر الشكل 3.1.



شكل 3.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1,2,\dots,200\}$ و $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} 3(4^k)$.

لاحظ من الشكل 3.1 سرعة تباعُد المُتَتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ إلى اللانهاية. إذ إنَّ:

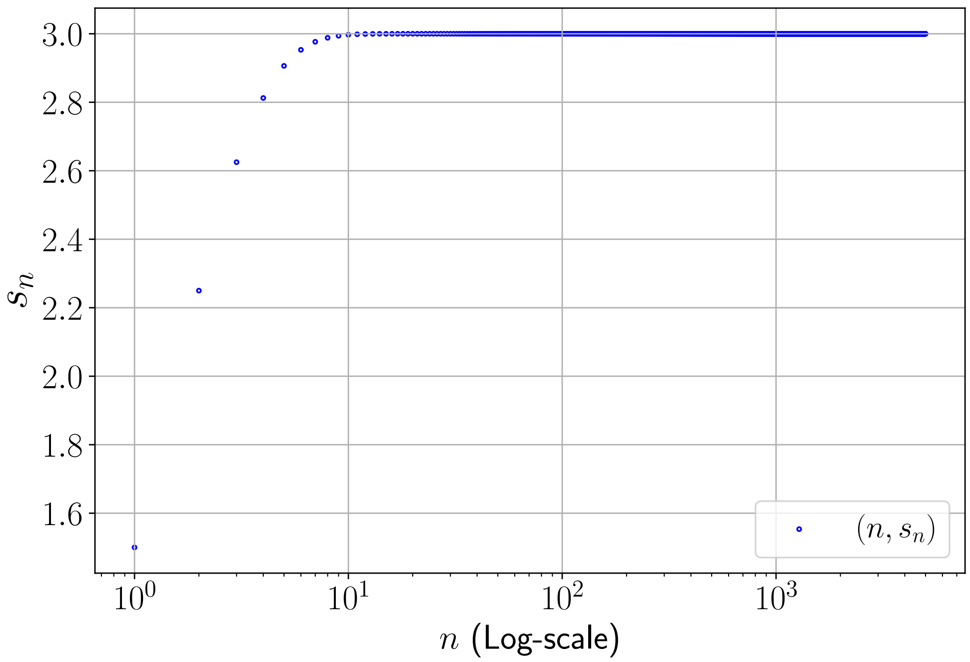
$$s_{10}=4194300,\ s_{50}=5\times 10^{45},\ s_{100}=6\times 10^{75},\ s_{300}=10^{197}.$$

مثال 5:

المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ مُتقارِبَة. إذ إنَّها هَندسِيَّة، أساسها $q = \frac{1}{2} < 1$، وحَدُّهَا الأول $\frac{3}{2}$.
ومنه فإنَّ مجموعها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

انظر الشكل 4.1.



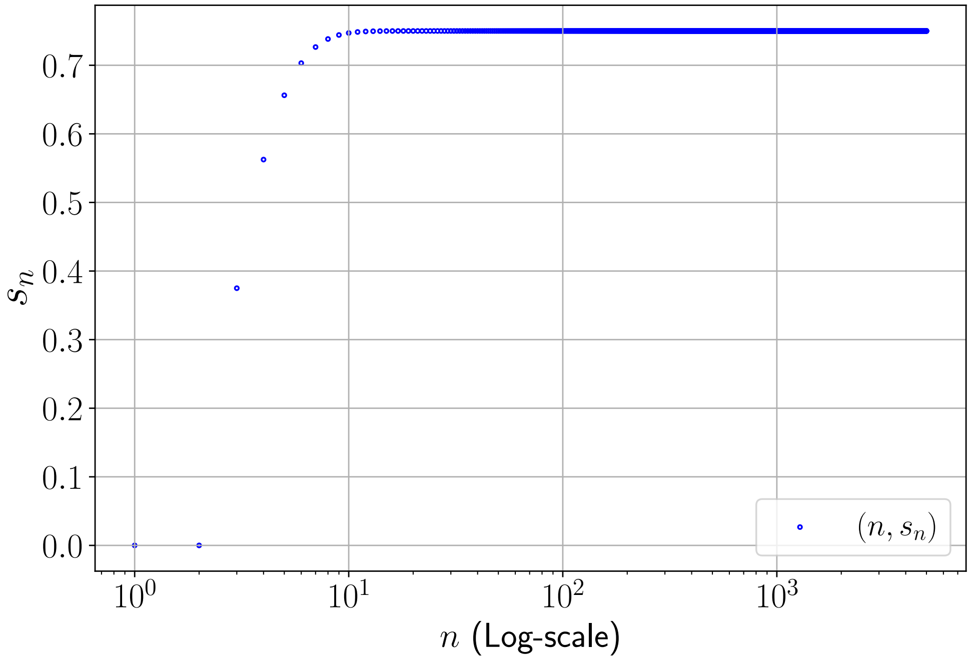
شكل 4.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2^k}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{5000} \approx 2.999999$.

ملاحظة 3:

المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^n}$، والتي هي ذاتها المذكورة في المثال 5، لكن محذوفاً منها الحدَّين الأول والثاني a_1, a_2، هي مُتَسَلْسِلَة مُتَقارِبَة، ومجموعها:

$$\sum_{n=3}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

انظر الشكل 5.1. ومنه نلاحظ أنَّ حذف عدد منته من حدود مُتَسَلْسِلَة مُتَقارِبَة، لا يؤثر على طبيعتها، إنَّما يؤثر على مجموعها فقط.

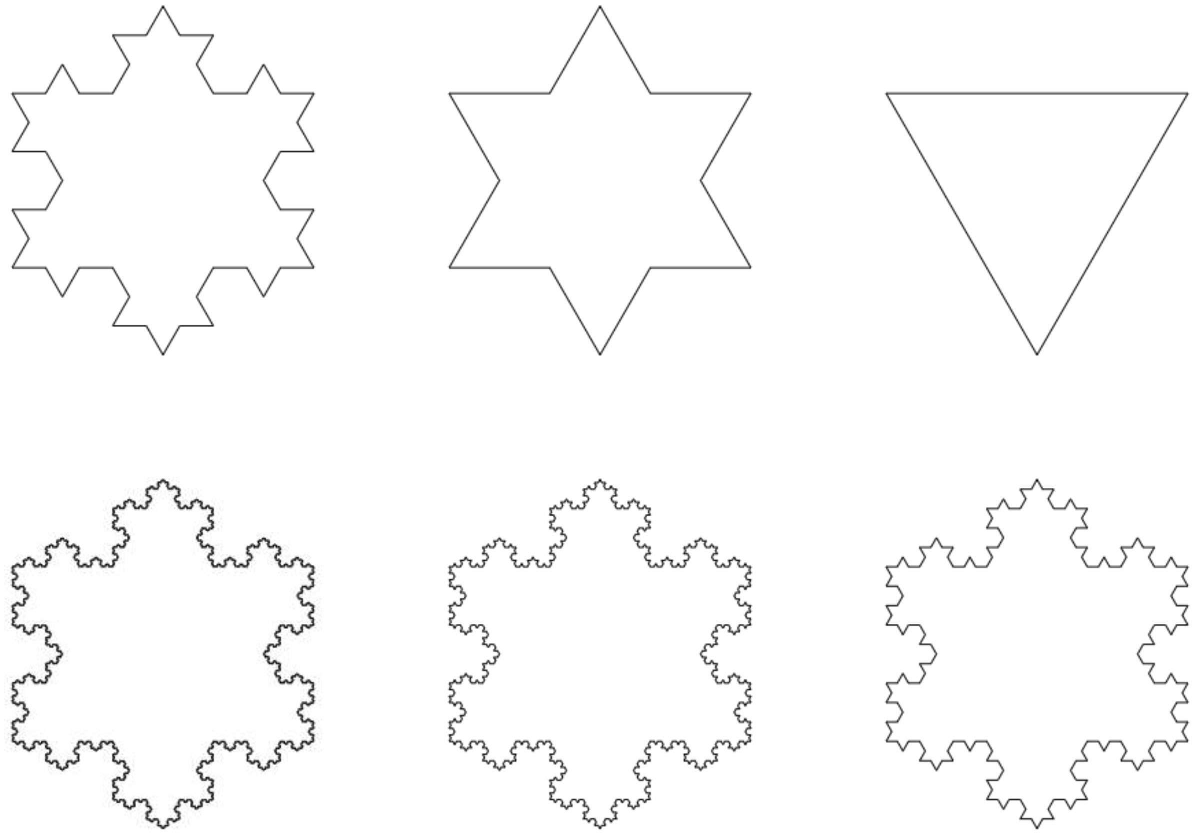


شكل 5.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{3}{2^k}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{5000} \approx 0.7499999$.

3.1.1 تطبيق: منحني نُدْفَة الثَّلج

لنعرِّف مُتَتَالِيَة الأشكال $\{F_n\}_{n \geqslant 0}$ (انظر الشكل 1.1)، بالشكل الآتي: المنحني F_0 هو المثلث المتساوي الأضلاع، طول ضلعه يساوي 1. لأجل $n \geqslant 1$، المنحني F_n يتم بناؤه بحذف الثُّلُث الأوسط في كل ضلع من أضلاع F_{n-1}، واستبداله، من جهة الخارج، بمثلث متساوي الأضلاع، قاعدته هي الثُّلُث الأوسط المحذوف. المنحني F_n لأجل n عدد كبير جدًا (يسعى إلى اللانهاية) يدعى منحني نُدْفَة الثَّلج[10].

[10] منحني نُدْفَة الثَّلج (Koch snowflake)، هو أحد المنحنيات الكُسورِيَّة (fractals)، قام ببنائه عالم الرياضيات السُّويدي هِيلْغ فُونْ كُوخ (1870-1924) Helge von Koch.



شكل 6.1: F_0 في اليمين من الأعلى، F_1 في الوسط من الأعلى، F_2 في اليسار من الأعلى، F_3 في اليمين من الأسفل، F_4 في الوسط من الأسفل، F_5 في اليسار من الأسفل.

لنرمز بـ N_n لعدد أضلاع الشكل F_n، وبـ ℓ_n لطول ضلع F_n، وبـ L_n لمحيط F_n، وبـ A_n لمساحة F_n.
لأجل المنحني F_0، يكون $N_0 = 3$، و $\ell_0 = 1$، و $L_0 = 3$، و $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

عند بناء F_1 من F_0، نقوم بحذف الثُّلُث الأوسط لكل ضلع من أضلاع F_0، واستبداله بمثلث متساوي الأضلاع، من جهة الخارج، قاعدته هي الجزء المحذوف. فيكون عدد أضلاع الشكل F_1 يساوي:

$$N_1 = 4 \cdot 3 = 12.$$

وبما أنَّ طول كل ضلع من F_1 يساوي ثُلُث طول ضلع F_0، فإنَّه يكون:

$$\ell_1 = \frac{1}{3}\ell_0 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

كما أنَّ:

$$N_2 = 4N_1 = 4^2 \cdot 3, \quad \ell_2 = \frac{1}{3}\ell_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

وبالمثل نجد أنَّ:

$$N_3 = 4N_2 = 4^3 \cdot 3, \quad \ell_2 = \frac{1}{3}\ell_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

ومنه، بالاستقراء، نجد أنَّ:

$$N_n = 4^n \cdot 3, \quad \ell_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

وبالتَّالي فإنَّ محيط F_n يساوي:

$$L_n = N_n \cdot \ell_n = 4^n \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3$$

ومنه محيط منحني نُدْفَة الثَّلج يساوي:

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = +\infty.$$

من أجل حساب مساحة المنطقة التي يحيط بها الشكل F_n، نرمز بـ T_n لمساحة كل مثلث جديد ينتج عند بناء الشكل F_n. ومنه، وِفْقًا لطريقة تشكيل المنحني F_n، يكون:

$$A_n = A_{n-1} + N_{n-1}T_n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

كما أنَّ:

$$T_0 = A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\ell_0)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$
$$T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\ell_1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^1,$$
$$T_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\ell_2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2.$$

ومنه بالاستقراء نجد أنَّ:

$$T_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(\ell_n)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

وبالتالي فإنَّ:

$$A_n = A_{n-1} + 4^{n-1} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad A_n = A_{n-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

لأجل $n = 0, 1, 2, 3$، نجد أنَّ:

$$n = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$n = 1 \quad \Longrightarrow \quad A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^1\right],$$

$$n=2 \implies A_2 = A_1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^1+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2\right],$$

$$n=3 \implies A_3 = A_2 + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^1+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3\right],$$

ومنه بالاستقراء نجد أنَّ:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^1+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{9}}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ مساحة المنطقة التي يحيط بها منحني نُدْفَةُ الثَّلْج يساوي:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8}{5}-0\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

لَدَى تحليل النتائج السابقة، أي $L=\infty$ (محيط نُدْفَة الثَّلْج)، و $A=\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (مساحة المنطقة التي يحيط بها منحني نُدْفَة الثَّلْج)، فإنَّه يبدو للوهلَة الأولى أنَّه يوجد تناقض، وأنَّ النتائج غير منطقِيَّة. إلا أنَّ النتائج صحيحة ولا تناقض فيها. إذ يَتِم مصادفَة نتائج مماثلة في كثير من الأماكن في الرياضيات. وبشكل خاص عند دراسة التَّكامُلات المُعتلَّة المُتَقارِبَة (عندما يكون أحد حدود التَّكامُل ∞). فعلى سبيل المثال، يمكن التعبير عن مساحة المنطقة المستوية المحدودة بمنحني الدَّالَّة $f(x)=\frac{1}{x^2}$، والمحور x، حيث $x\in[1,+\infty[$، بالتَّكامُل الآتي:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

وهذا يعني أنَّ مساحة هذه المنطقة المستوية تساوي 1. إلا أنَّه من السهل ملاحظة أنَّ طول منحني الدَّالَّة $f(x)=\frac{1}{x^2}$، حيث $x\in[1,+\infty[$، يساوي ∞.

4.1.1 الخاصّة الخطيّة للمُتَسلْسِلَاتِ المُتَقارِبَة

مبرهنة 2:

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتسلسلتَيْن حَقيقيَّتيْن مُتَقَارِبتَيْن من a و b على الترتيب. وليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
عندئذ المُتَسلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ مُتَقارِبة، ويتحقّق:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

نتيجة 1:

إذا كانت $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَسَلْسِلَة مُتَقارِبَة، و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتَبَاعِدَة. عندئذ فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ تكون مُتَبَاعِدَة (فهي مُتَسَلْسِلَة هندسيَّة أساسها يساوي $\frac{1}{2}$).

مثال 6:

المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n})$ مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 7.1). إذ إنَّ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ مُتَبَاعِدَة (سَنُبرِّر تَبَاعُد هذه المُتَسلْسِلَة في وقت لاحق، انظر المثال 7) والمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ مُتَقارِبَة.

ملاحظة 4:

إذا كان كل من $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتَبَاعِدَة، فإنَّه ليس بالضرورة أن تكون $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ مُتَبَاعِدَة.
فعلى سبيل المثال: كل من $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ مُتَسَلْسِلَة مُتَبَاعِدَة، إلا أنَّ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ مُتَقارِبَة.
إذ إنَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

5.1.1 الشرط اللَّازم وغير الكافي للتَّقارُب

مبرهنة 3:

إذا كانت المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة، فإنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

ملاحظة 5:

إنَّ عكس المبرهنة 3، غير صحيح في الحالة العامة. فعلى سبيل المثال: لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$، لكنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة (انظر المثال 7). وبالتَّالي فإنَّه لا يمكن استخدام المبرهنة 3 كاختبار للحكم على تَقارُب مُتَسَلْسِلَة ما (انظر الشكل 7.1).

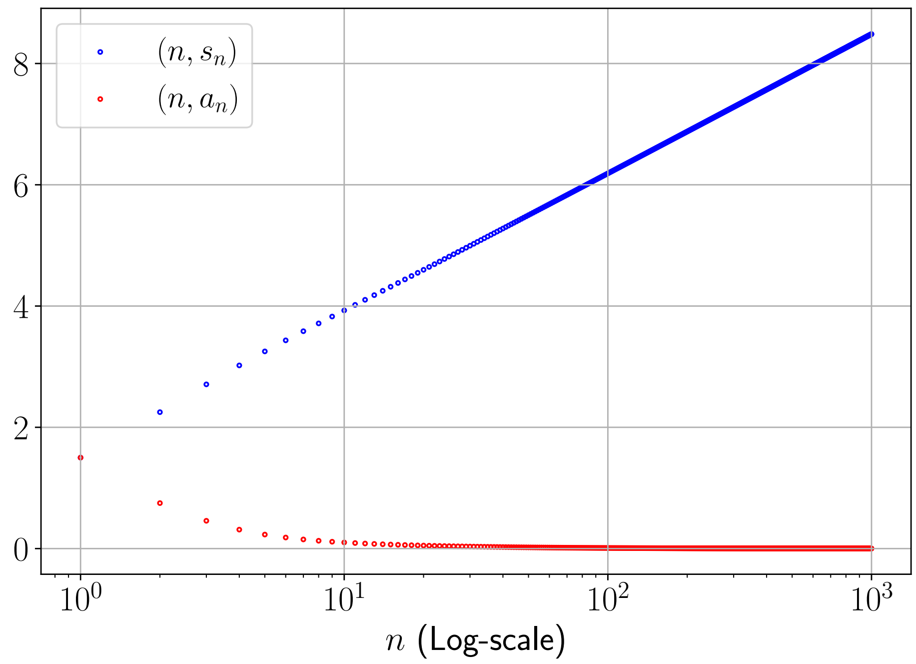
إلا أنَّ المبرهنة 3 تكافئ القول: "إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$، أو إذا كانت النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ غير موجودة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَباعِدَة". وبذلك نجد أنَّه يمكن استخدام المبرهنة 3 كاختبار للحكم على تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. فعلى سبيل المثال، المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+2n+1}{3n^2+5}$ مُتَباعِدَة، لأنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+1}{3n^2+5} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

والمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ مُتَباعِدَة، إذ إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

ومنه نجد أنَّ هذه النهاية تساوي 1 إذا كان n عدد زوجي، وتساوي -1 إذا كان n عدد فردي. ومنه فليس للنهاية $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ قيمة محدَّدة وحيدة فهي غير موجودة.



شكل 7.1: النقاط (n, s_n) و (n, a_n) حيث $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$ ، $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right)$ من أجل $n \in \{1, 2, \dots, 1000\}$. لاحظ أنَّ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ، والمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right)$ مُتَباعِدَة (انظر المثال 6).

2.1 المُتَسَلْسِلَات العَدَدِيَّة ذات الحدود غير السالبة واختبارات التَّقارُب

وجدنا سابقًا أنَّ دراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتبطة بدراسة تَقارُب أو تَباعُد مُتَتَالِيَة مجاميعها الجُزْئِيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$. ووجدنا أنَّه يمكن بسهولة دراسة المُتَسَلْسِلَة الهَندسيَّة والتِّلِسْكُوبيَّة. إلا أنَّه في أغلب الأحيان تكون الحسابات اللازمة لإيجاد الحد العام s_n للمُتَتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ بصورة مُنتهِيَة (من أجل حساب النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$) معقدة أو مستحيلة أحيانًا أخرى. لذلك دعت الحاجة إلى التفكير باختبارات أخرى لتحديد تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (دون تحديد مجموعها). وتُعدُّ المبرهنة 3 أحد هذه الاختبارات، والذي يدعى الاختبار الصفري.

سنعرض الآن بعض هذه الاختبارات، إذ ستكون البداية باختبار كُوشِي التَّكامُلِي، ثم اختِبَارَي المُقارَنة الأول والثاني، بعدها سنعرض اختبار دَالامْبِير، ثم اختبار كُوشِي، واختبار رَابْ، وأخيرًا اختبار بِرْتْرَان. وسنعرض بعض الأمثلة التوضيحية لكل اختبار من هذه الاختبارات التي سيتم تناولها.

1.2.1 اختبار كُوشِي التَّكامُلِي

فيما يأتي نعرض اختبارًا لدراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات ذات الحدود الموجبة، والذي ساهم في تطويره كل من كولِن ماكْلوران وأوغسطين لويس كُوشِي، لذلك فإنَّ هذا الاختبار يُدعى أحيانًا اختبار ماكْلوران-كُوشِي (Maclaurin–Cauchy test).

اختبار كُوشِي التَّكامُلِي:

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَسَلْسِلَة عَدَدِيَّة ذات حدود غير سالبة $(a_n \geqslant 0, \forall n \geqslant 1)$. ولتكن f دالَّة مستمرة ومُتَنَاقِصَة على المجال $[1, +\infty[$، بحيث $f(n) = a_n$. عندئذ فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ والتَّكامُل المعتل $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ من طبيعة واحدة (مُتقارِبَان معًا أو مُتَباعِدَان معًا).

مثال 7:

لندرس الآن، حسب قيم $p \in \mathbb{R}$ تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

(1) ليكن $p \leqslant 0$، ومنه فإنَّ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$. والمُتَسَلْسِلَة المَدْرُوسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ مُتَبَاعِدَة عندما $p \leqslant 0$.

(2) ليكن $p = 1$، ولنأخذ الدَّالَّة

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+; \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$

إنَّ الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[1, +\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \qquad \forall x \in [1, +\infty[.$$

ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي محققة. كما أنَّ:

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty.$$

والتَّكامُل مُتَباعِد لأجل $p = 1$، ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَبَاعِدَة.

(3) ليكن $0 < p < 1$، ولنأخذ الدَّالَّة

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+; \qquad f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

إنَّ الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[1,+\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x)=-\frac{p}{x^{1+p}}<0,\quad \forall x\in[1,+\infty[,\ 0<p<1.$$

ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي محققة. كما أنَّ:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x)dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^{-p}dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b\\ &= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{1-p}-1)=\infty.\end{aligned}$$

والتَّكامُل مُتبَاعِد لأجل $0<p<1$. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ مُتبَاعِدَة لأجل $0<p<1$.

(4) ليكن $p>1$. نلاحظ (كما في الحالة (3)، مع مراعاة أنَّ $p>1$) أنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي محققة. كما أنَّ:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x)dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^{-p}dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b\\ &= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{x^{p-1}}-1\right]=\frac{1}{p-1}\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

والتَّكامُل مُتقَارِب لأجل $p>1$، ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ مُتَقارِبَة لأجل $p>1$.

تدعى المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (والمُتَقارِبَة عندما $p>1$، والمُتَباعِدَة خلاف ذلك)، مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ[11] (Riemann series). كما وتدعى المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة (harmonic series). وتجدر الإشارة إلى أنه تمَّ إثبات تَباعُد المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة لأول مرة، في القرن الرابع عشر، من قِبَل نيكول أورسمي (Nicole Oresme)[12]. إلا أنَّ إثباته ظلَّ مجهولًا، حتى تمَّ في القرن السابع عشر تقديم الإثبات من قِبَل عالم الرياضيات الإيطالي بييترو مِنْغُولِي (Pietro Mengoli)، وعالم الرياضيات السويسري

[11] تُنسب هذه المُتَسَلْسِلَة للعالِم جورج فريدريك بِرْنهَارْد رِيمَانْ (1826-1866)، وهو رياضيٌّ ألماني مبدع، له إسهامات أساسية في الهندسة ونظرية الدَّوال التحليلية العقدية، إضافة إلى نظرية الأعداد والتبولوجيا والفيزياء الرياضية.

[12] نِيكُولْ أُورِسْمِي (1325-1382). عالم رياضيات وفلكي وفيلسوف فرنسي. كتب العديد من الأعمال المؤثرة في الرياضيات والاقتصاد والفيزياء والفلك. كان مُترجمًا لملك فرنسا شَارْلْ الخامس.

يُوهَانْ بِرْنُولِي (Johann Bernoulli).

يعتمد إثبات نِيكُولْ على تَجميع حدود المُتَسَلْسِلَةَ التَّوافُقِيَّة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ضمن مجموعات منتهية، وبعدها إيجاد حد أعلى لكل منها بالاعتماد على عدد حدودها، بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots\end{aligned}$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ مُتَبَاعِدَة، فنجد أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ التَّوافُقِيَّة مُتَبَاعِدَة.

ملاحظة 6:

تُعدُّ المُتَسَلْسِلَةَ التَّوافُقِيَّة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ من المُتَسَلْسِلَات المثيرة للاهتمام، إذ إنَّها مُتَبَاعِدَة إلى ∞، وتَبَاعُدُها يتم بشكل بطيء جدًا (انظر [19] للمزيد في هذا الموضوع). وهذا يعني أنَّ المَجَامِيْع الجُزئِيَّة: $s_k = a_1 + \ldots + a_k$، تسعى إلى ∞، لكن ببطء شديد جدًا. إذ إنَّه في الحقيقة:

$$s_{10} \approx 2.92897, \quad s_{10^2} \approx 5.18738, \quad s_{10^3} \approx 7.48547, \quad s_{10^4} \approx 9.78761,$$

$$s_{10^5} \approx 12.09015, \quad s_{10^6} \approx 14.39273, \quad s_{10^9} \approx 21.30048,$$

$$s_{10^{12}} \approx 28.20824, \quad s_{10^{20}} \approx 46.62892, \quad s_{10^{100}} \approx 230.83572.$$

ومنه نجد أنَّ هذا المثال يوضح حقيقة هامة، مفادُها أنَّه لا يمكن الاعتماد على الحسابات العَدَدِيَّة (باستخدام الحواسيب المتطورة ذات الأداء العالي) لدراسة أو تخمين طبيعة المُتَسَلْسِلَات العَدَدِيَّة.

2.2.1 اختبارات المُقارَنة

اختبار المُقارَنة الأول:

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتسَلسِلتَيْن، كل منهما ذات حدود غير سالبة، بحيث:

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

عندئذ:

(1) إذا كانت $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتقارِبة فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون مُتقارِبة.

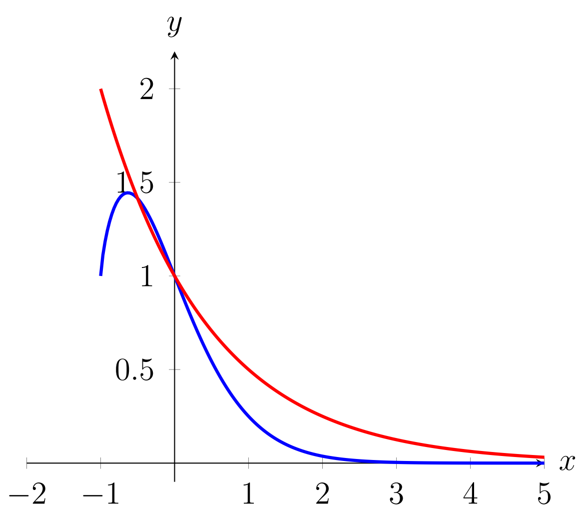
(2) إذا كانت $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَبَاعِدة فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ تكون مُتباعِدة.

مثال 8:

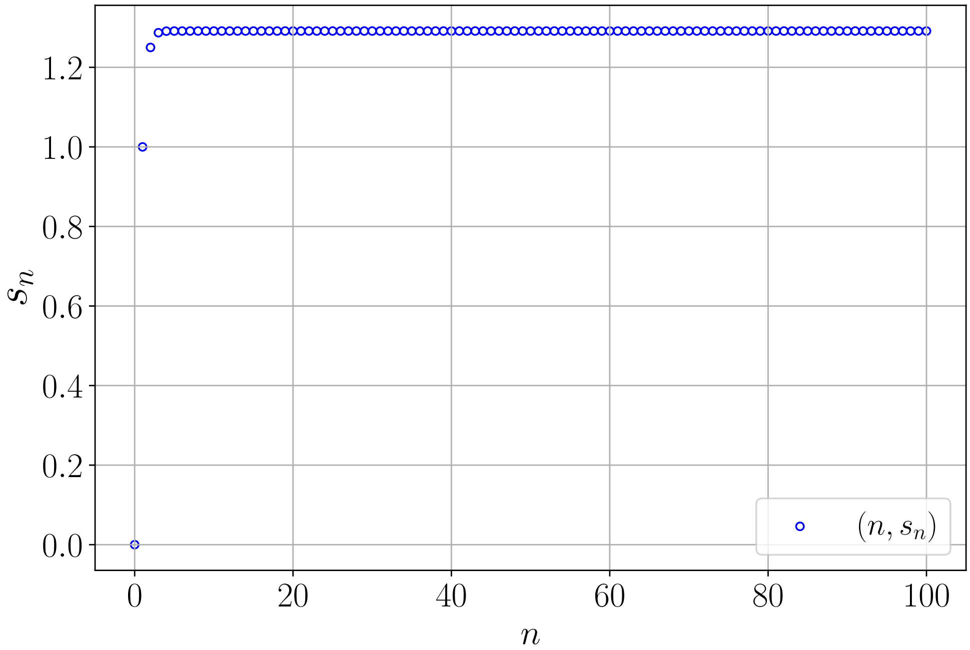
المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ مُتَقارِبة. إذ إنَّ:

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad \forall n \geqslant 0.$$

(انظر الشكل 8.1). وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ مُتَقارِبة (هَندسِيَّة أساسها $q = \frac{1}{2} < 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المَدرُوسَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ مُتَقارِبة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 9.1).



شكل 8.1: الخطَّان البيانيَّان للدَّالَّتيْن: $f_1(x) = \frac{1}{(x+1)^{x+1}}$, $f_2(x) = \frac{1}{2^x}$.



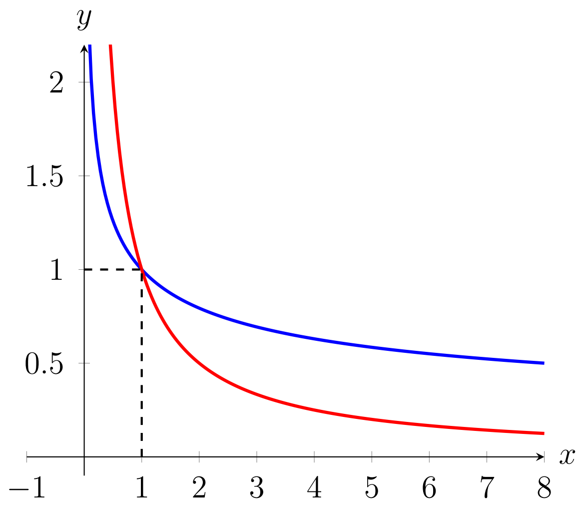
شكل 9.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{0, 1, \dots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 1.2912859971$. لاحظ من الشكل سرعة تَقارُب المُتَتَالِية $\{s_n\}_{n\geqslant 0}$، إذ إنَّها تتَقَارَب من النهاية التي تساوي تقريبًا 1.3 بدءًا من الحد الرابع. كما أنَّه يُمكِنُنا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \approx 1.3$.

مثال 9:

المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ مُتَباعِدَة. إذ إنَّ:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geqslant \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

(انظر الشكل 10.1). وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المَدْرُوسَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقَارَنة الأول.



شكل 10.1: الخَطَّان البَيانيَّان للدَّالَّتيْن: $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, f_2(x) = \frac{1}{x}$ ضمن المجال $]0, +\infty[$.

اختبار المُقارَنة الثاني:

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتسلسِلَتَيْن، كل منهما ذات حدود موجبة (أي أنَّ: $a_n > 0, b_n > 0, \ \forall n \geqslant 1$). بفرض أنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ ، عندئذ فإنَّ:

(1) إذا كان $0 \lneqq A \lneqq \infty$، فإنَّ المُتسَلسِلتيْن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة (مُتقَارِبتَان معًا أو مُتباعِدَتَان معًا).

(2) إذا كان $A = 0$، وكانت المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتَقارِبَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون مُتقارِبة أيضًا.

(3) إذا كان $A = \infty$، وكانت المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتَباعِدَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون مُتباعِدَة أيضًا.

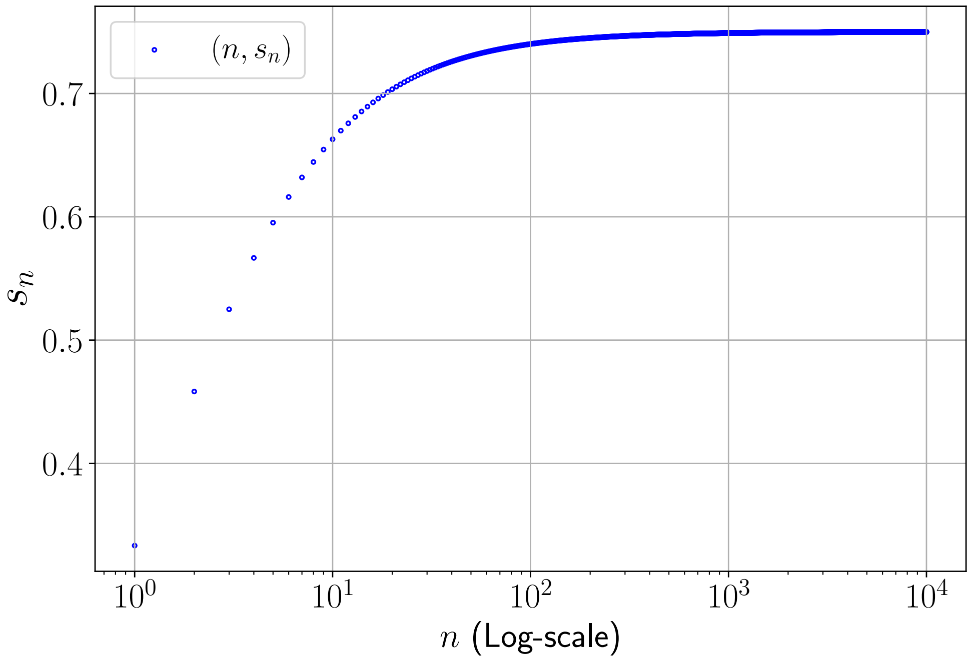
مثال 10:

المُتَسَلسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}$ مُتَقارِبَة. إذ إنَّ الفرق بين دَرَجتَي البسط (والتي تساوي الصفر) والمقام

(والتي تساوي 2) يساوي 2، ومنه بأخذ $a_n = \frac{1}{(n+1)^2-1}$ و $b_n = \frac{1}{n^2}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^2+2n} = 1.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ مُتقارِبَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ، حيث $p = 2 > 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المَدْرُوسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}$ مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني. انظر الشكل 11.1.



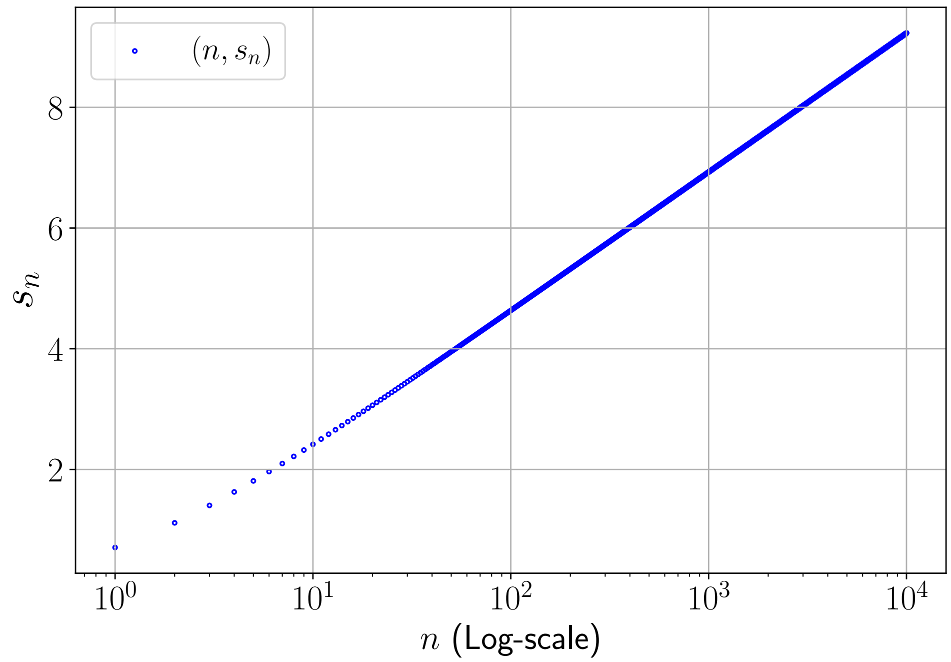
شكل 11.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2-1}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{10^4} \approx 0.7499$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأن: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.75$

مثال 11:

المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ مُتَباعِدَة. إذ إنَّ الفرق بين دَرَجتَي البسط (والتي تساوي الصفر) والمقام (والتي تساوي 1، إذ يوجد لدينا جذر تربيعي لكثيرة حدود من الدرجة الثانية) يساوي 1. ومنه بأخذ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ و $b_n = \frac{1}{n}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَةٌ (المُتَسَلْسِلَةَ التَّوافُقِيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المَدروسَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ مُتَباعِدَةٌ حسب اختبار المُقارَنة الثاني. انظر الشكل 12،1.



شكل 12،1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$.

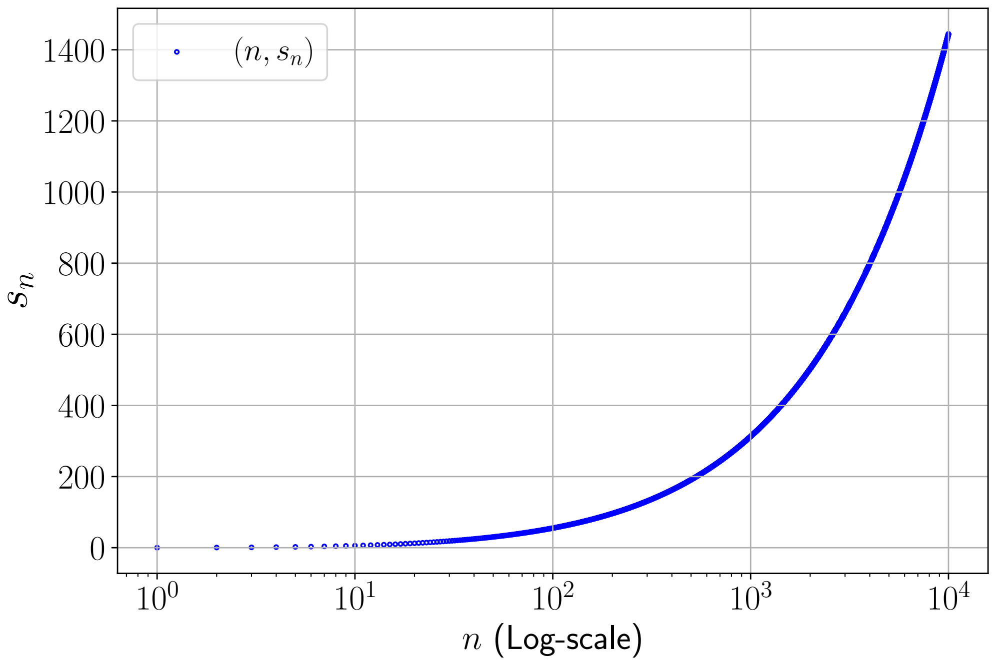
من هذا الشكل نلاحظ أنَّ المُتتالِيَةَ $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ تَتَباعَدُ إلى اللانهاية بشكل بطيء جدًا. إذ إنَّ: $s_{100} \approx 4.634147, \; s_{1000} \approx 6.9277833, \; s_{10^4} \approx 9.2294689$.

مثال 12:

المُتَسَلْسِلَةُ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}}$ مُتَباعِدَةٌ. إذ إنَّه بأخذ $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}}$، و $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}\ln(n)}{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \infty.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ مُتَباعِدَةٌ (مُتَسَلْسِلَةُ ريمان، حيث $p = 1/2 < 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المَدروسَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}}$ مُتَباعِدَةٌ حسب اختبار المُقارَنة الثاني. انظر الشكل 13،1.



شكل 13.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k+1}}$.

3.2.1 اختبار دَالامْبِير

فيما يأتي نعرض اختبارًا لدراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات ذات الحدود الموجبة، والذي اكتشفه جَان لُو رُونْد دَالامْبِير[13] عام 1768 [18]. يُدعَى اختبار دَالامْبِير أحيانًا اختبار النسبة (Ratio test).

---

[13] Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) عالِمٌ فرنسي، حصل على إجازة في القانون عام 1738، واتجه لدراسة الطب لفترة وجيزة قبل أن يستقر على العمل في الرياضيات. عمل في الميكانيك (مبدأ دَالامْبِير لقوى القصور الذاتي) وميكانيك السوائل. في عام 1747، نشر معادلة المَوجَة. أصبح، بالاشتراك مع ديدرو (Diderot)، مُحرِراً للموسوعة (Encyclopédie) التي كتب فيها أكثر من 1700 مقالة، معظمها في العلوم. عرَّف المشتق على أنه نهاية لنسبة الفرق، واكتشف اختبار النسبة لتَقارُب المتسلسلات العددية. ساهم دَالامْبِير في إثبات النظرية الأساسية للجبر، والتي غالباً ما يتم تسميتها باسمه في اللغة الفرنسية. بالإضافة إلى ذلك، نشر أبحاثًا في علم الفلك، والفلسفة، وترجم مخطوطات قديمة من اللاتينية إلى الفرنسية.

اختبار دَالامْبِير:

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَسَلْسِلَة ذات حدود موجبة (أي أنَّ: $a_n > 0,\ \forall n \geqslant 1$). وبفرض:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

بحيث $0 \leqslant D \leqslant \infty$. عندئذ:

(1) إذا كان $D < 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتقارِبَة.

(2) إذا كان $D > 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتباعِدَة.

(3) إذا كان $D = 1$، فإنَّ اختبار دَالامْبِير يفشل في تحديد تَقارُب أو تَباعُد المُتَسلسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

فعلى سبيل المثال: لأجل المُتَسَلْسِلَة المُتَباعِدَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$، يكون $D = 1$. ولأجل المُتَسلسِلَة المُتَقارِبَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ يكون $D = 1$ أيضًا.

مثال 13:

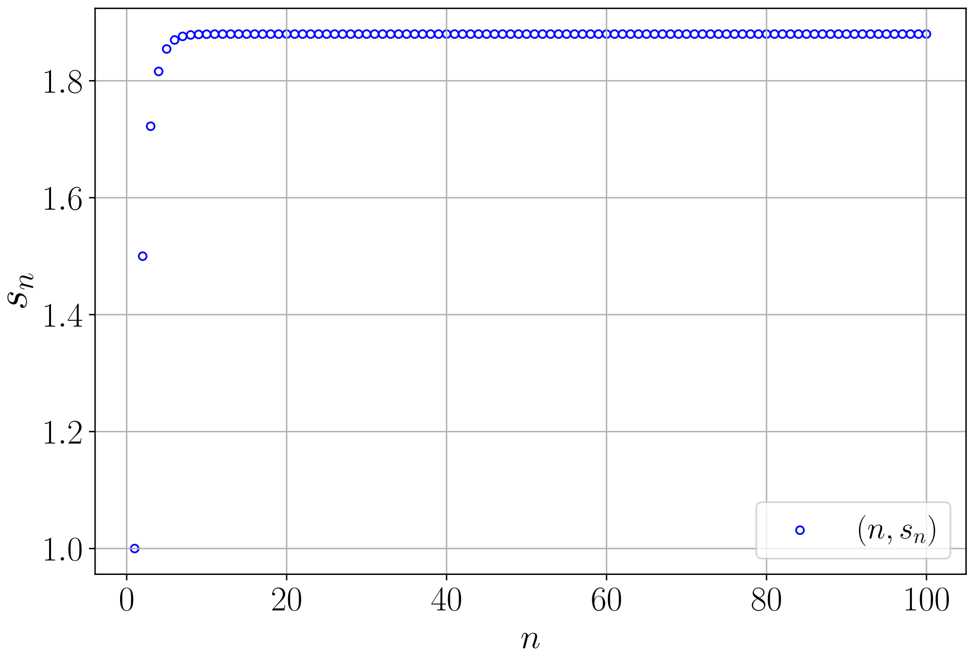
لأجل المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$، ذات الحدود الموجبة، يكون:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.\end{aligned}$$

فالمُتَسلْسِلَة المَدْرُوسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِير. انظر الشكل 14.1.

تذكَّر النهاية الشهيرة:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$



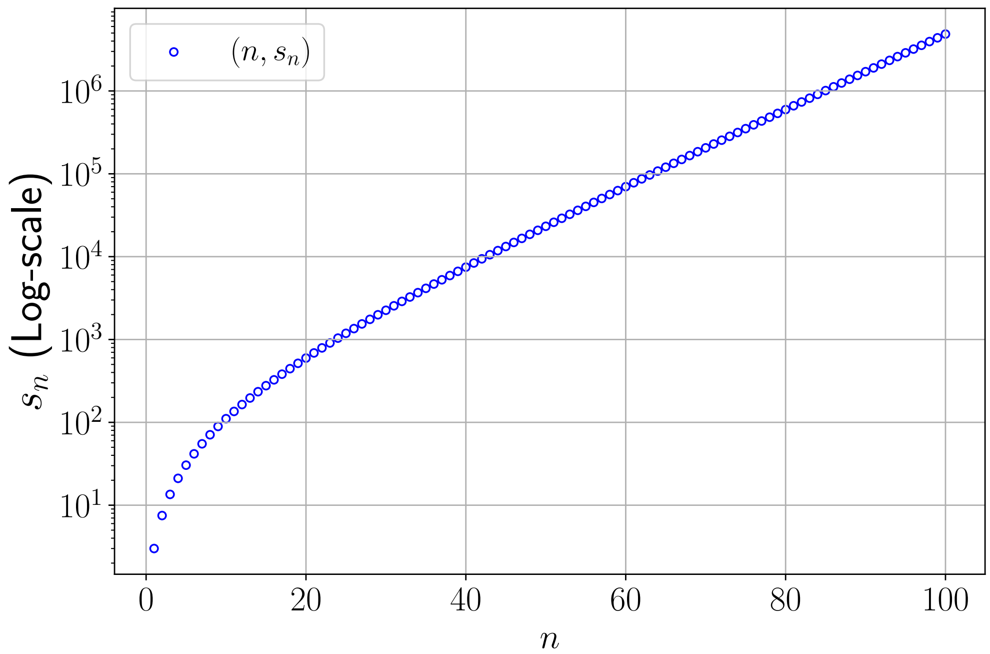
شكل 14.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^k}$، في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 1.87985386$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأن: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \approx 1.88$.

مثال 14:

لأجل المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$، ذات الحدود الموجبة، يكون:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.
\end{aligned}$$

فالمُتَسَلْسِلَة المَدروسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ مُتَباعِدَة حسب اختبار دَالامْبِير. انظر الشكل 15.1.



شكل 15.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k \cdot k!}{k^k}$.

4.2.1 اختبار كُوشِي (اختبار الجذر النوني)

فيما يأتي نعرض اختبارًا لدراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات ذات الحدود الموجبة، والذي قدَّمه أُوغُسْطين لويس كُوشْي في كتابه المنشور عام 1821 [16].

اختبار كُوشِي:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَسَلْسِلَة ذات حدود غير سالبة (أي أنَّ: $a_n \geqslant 0, \ \forall n \geqslant 1$). وبفرض: $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$، بحيث $0 \leqslant C \leqslant \infty$. عندئذ:

(1) إذا كان $C < 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبة.

(2) إذا كان $C > 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَباعِدَة.

(3) إذا كان $C = 1$، فإنَّ اختبار كُوشِي يفشل في تحديد تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

فعلى سبيل المثال: لأجل المُتَسَلْسِلَة المُتَباعِدَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$، يكون $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. ولأجل المُتَسَلْسِلَة المُتَقارِبَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ يكون $C = 1$ أيضًا.

مثال 15:

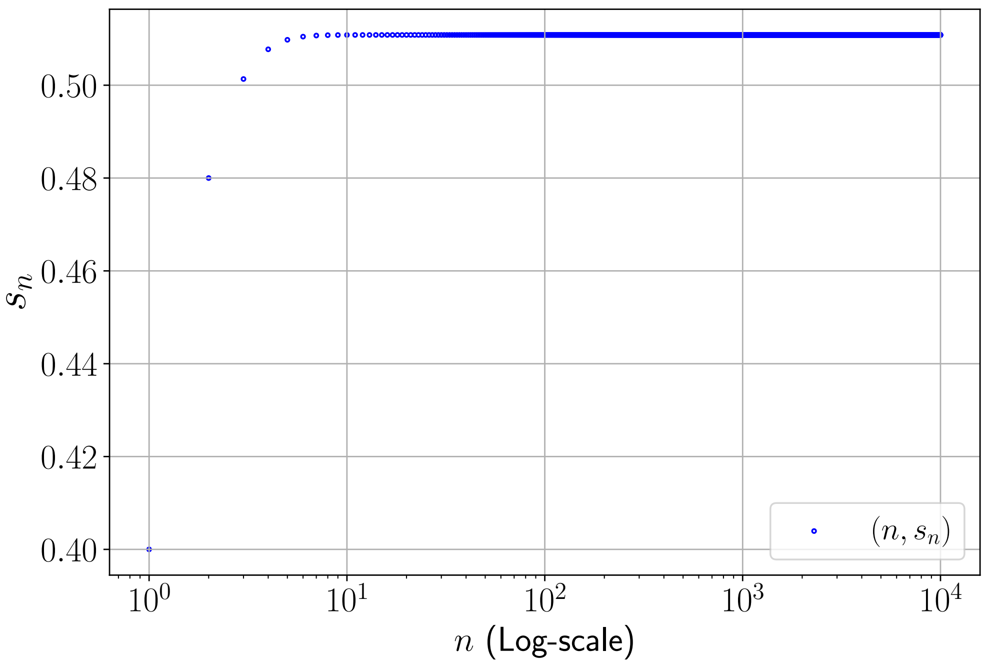
لأجل المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$، ذات الحدود غير السالبة، يكون:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1$$

فالمُتَسَلْسِلَة المَدرُوسَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي. انظر الشكل 16.1.

تذكر أن:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$



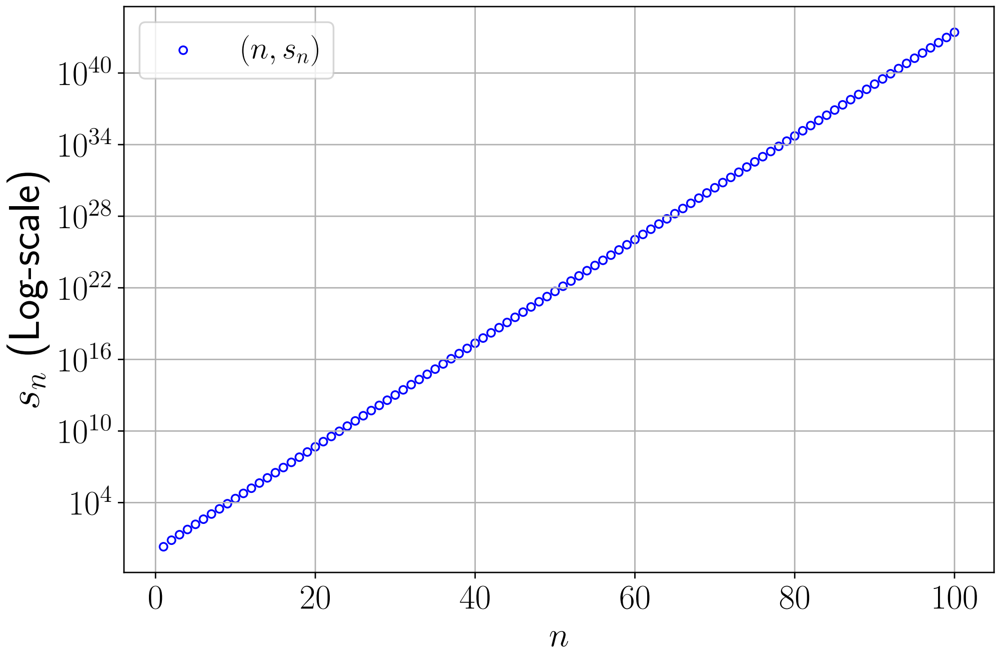
شكل 16.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^5\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^5} \approx 0.5108256$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأن: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n \approx 0.51$.

مثال 16:

لأجل المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$، ذات الحدود غير السالبة، يكون:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

فالمُتَسَلْسِلَة المَدْرُوسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ مُتَبَاعِدَة حسب اختبار كُوشِي. انظر الشكل 17،1.



شكل 17،1: النقاط (n, s_n) حيث $n\in\{1,2,\dots,100\}$ و $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k^2}$.

من الشكل 17،1 نلاحظ سرعة تَباعُد المُتَتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ إلى اللانهاية بشكل كبير جدًا. إذ إنَّ:

$$s_{10}\approx 21847,\ \ s_{20}\approx 473303560,\ \ s_{100}\approx 2.58\times 10^{43},\ \ s_{200}\approx 6.94\times 10^{86}.$$

ملاحظة 7:

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ مُتَسَلْسِلَة ذات حدود موجبة (أي أنَّ: $a_n>0,\ \forall n\geqslant 1$). وليكن: $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$، بحيث $0\leqslant D\leqslant\infty$. عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

ومنه فإنَّ جميع المُتَسَلْسِلَات التي يحدد طبيعتها اختبار دَالامْبِير (مُتَقَارِبَة أم مُتَبَاعِدَة)، سيحدد طبيعتها أيضًا اختبار كُوشِي. إلا أنَّ العكس غير صحيح في الحالة العامة. فهناك مُتَسَلسِلَات نستطيع تحديد طبيعتها بتطبيق اختبار كُوشِي في حين يفشل اختبار دَالامْبِير في ذلك. فعلى سبيل المثال، لأجل المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$، ذات الحدود الموجبة. بوضع $a_n = \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$، نجد أنَّ: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة مُتَقَارِبَة حسب اختبار كُوشِي. إلا أنَّ النهاية $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ غير موجودة. ومنه نستنتج أنَّ اختبار كُوشِي أقوى من اختبار دَالامْبِير. إلا أنَّه يبقى اختبار دَالامْبِير الأكثر استخدامًا في كثير من الأحيان، لأنَّ حساب النهاية $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ أسهل نسبيًا من حساب $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

5.2.1 اختبار رَابْ

فيما يأتي نعرض اختبارًا لدراسة تَقَارُب أو تَبَاعُد المُتَسَلْسِلَات ذات الحدود الموجبة، والذي قدَّمه جوزيف رَابْ في مقالته المنشورة عام 1832 [14]، سُمِّي فيما بعد باسمه. ونظراً لإسهامات جُونْ مَارِي دُوَامِيلْ[14] ذات الصلة بهذا الاختبار في مقالته المنشورة عام 1839 [15]، فيُدعى اختبار رَابْ أحيانًا اختبار رَابْ-دُوَامِيلْ[15].

اختبار رَابْ:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَسَلْسِلَة ذات حدود موجبة (أي أنَّ: $a_n > 0, \ \forall n \geqslant 1$). وبفرض: $R = \lim_{n\to\infty} \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right]$، بحيث $-\infty \leqslant R \leqslant \infty$. عندئذ:

(1) إذا كان $R > 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَة.

(2) إذا كان $R < 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَبَاعِدَة.

(3) إذا كان $R = 1$، فإنَّ اختبار رَابْ يفشل في تحديد تَقَارُب أو تَبَاعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

[14] Jean-Marie Duhamel (1797-1872) عالِمٌ فرنسي، برع في الرياضيات والفيزياء وكان عضواً في الأكاديميَّة الفرنسيَّة للعلوم.

[15] Raabe–Duhamel's test

مثال 17:

لتكن المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n\cdot(2n)!!}$، ذات الحدود الموجبة، حيث:

$$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2,$$

وذلك مهما يكن العدد الزوجي $n \geqslant 2$، و

$$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1,$$

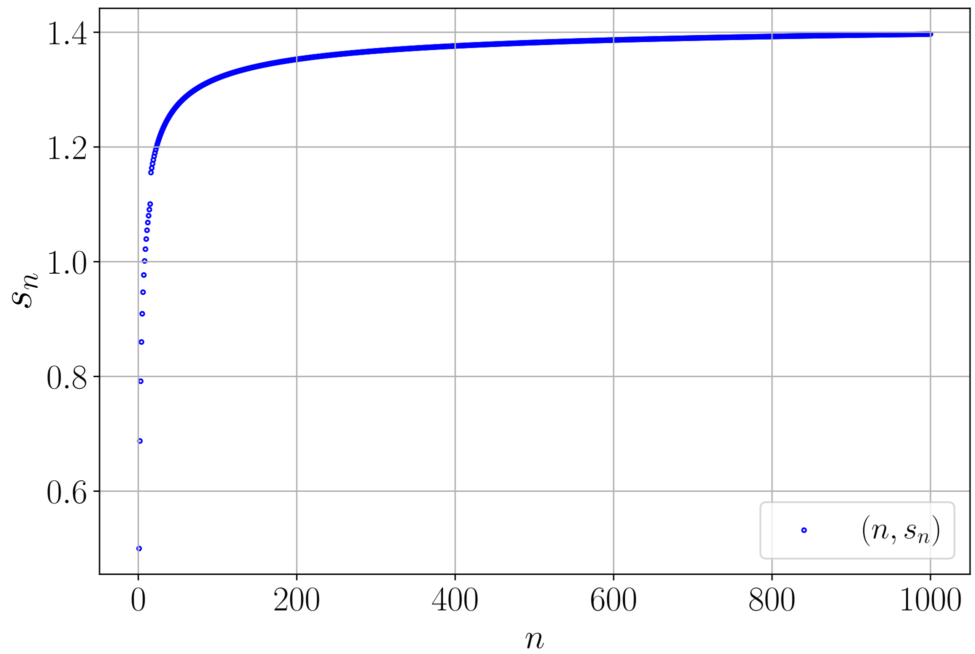
مهما يكن العدد الفردي $n \geqslant 3$.

كما أنَّ: $0!! = 1!! := 1$ (انظر ما كُتِبَ عن Double factorial في https://en.wikipedia.org).

بوضع: $a_n = \frac{(2n-1)!!}{n\cdot(2n)!!}$، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)\cdot(2n-1)!!\cdot(2n+2)!!}{n\cdot(2n)!!\cdot(2n+1)!!}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)\cdot\cancel{(2n-1)!!}\cdot(2n+2)\cdot\cancel{(2n)!!}}{n\cdot\cancel{(2n)!!}\cdot(2n+1)\cdot\cancel{(2n-1)!!}}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)(2n+2)}{n(2n+1)}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \cancel{n}\left(\frac{2(n+1)^2-n(2n+1)}{\cancel{n}(2n+1)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4n+2-2n^2-n}{2n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.
\end{aligned}$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المَدروسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n\cdot(2n)!!}$ مُتقارِبَة حسب اختبار رَابْ. انظر الشكل 18.1.



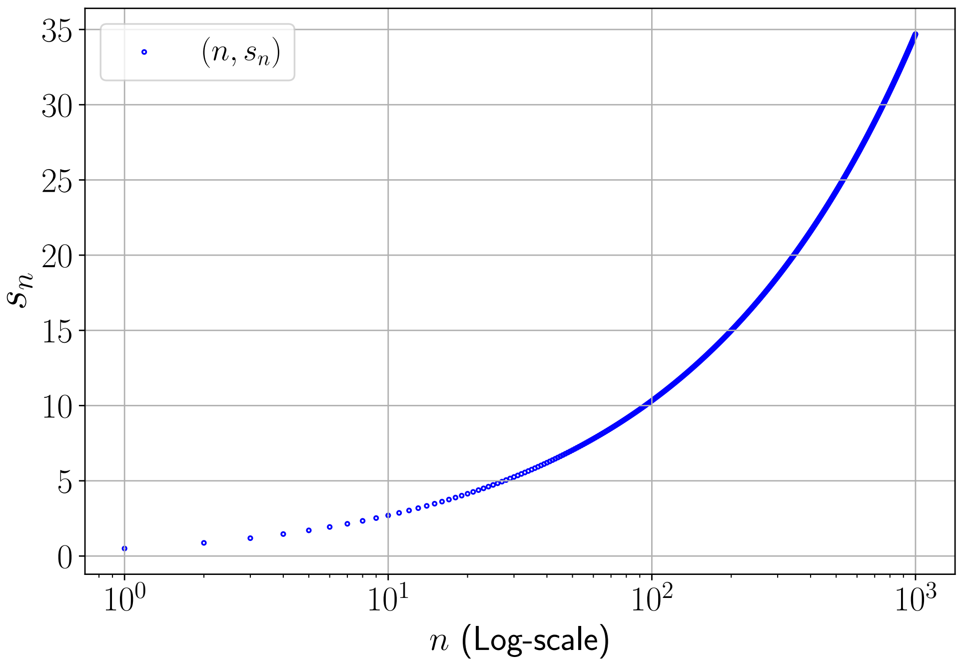
شكل 18.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{k\cdot(2k)!!}$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 1.396823$. ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n\cdot(2n)!!} \approx 1.4$.

مثال 18:

لتكن المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$، ذات الحدود الموجبة. بوضع: $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n-1)!!\cdot(2n+2)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)!!}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{(2n-1)!!}\cdot(2n+2)\cdot\cancel{(2n)!!}}{\cancel{(2n)!!}\cdot(2n+1)\cdot\cancel{(2n-1)!!}}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المَدروسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ مُتَباعِدَة حسب اختبار رَاب. انظر الشكل 19.1.



شكل 19.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$.

ملاحظة 8:

إنَّ اختبار رَابْ أقوى من اختبارَي كُوشِي ودَالامْبِير. إذ إنَّ المُتَسَلْسِلَات التي يحدّد طبيعتها كل من اختبارَي كُوشِي ودَالامْبِير، من حيث كونها مُتقَارِبَة أو مُتَباعِدَة، فإنَّ اختبار رَابْ سيحدد طبيعتها أيضًا. إلا أنَّ العكس غير صحيح في الحالة العامة. فعلى سبيل المثال، لأجل المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. نجد أنَّ اختبار رَابْ يحدد طبيعتها. إذ إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n} = 2 > 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ مُتَقَارِبَة، حسب اختبار رَابْ.

إلا أنَّه حسب اختبار دَالامْبِير، يكون: $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. وكذلك الأمر، حسب اختبار كُوشِي يكون: $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. وهذا يدل على فشل اختبارَي كُوشِي ودَالامْبِير في تحديد طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

ملاحظة 9:

يمكن في حالة فشل اختبار رَاب في تحديد طبيعة مُتَسَلْسِلَة عَددِيَّة ما، ذات حدود موجبة، أن نحاول تطبيق اختبار آخر يُدعى اختبار بِرْتْرَان الآتي.

6.2.1 اختبار بِرْتْرَان

فيما يأتي نعرض اختباراً لدراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات ذات الحدود الموجبة، والذي قدَّمه جوزيف بِرْتْرَان في مقالته المنشورة عام 1842 [17]. ويدعى هذا الاختبار أحيانًا اختبار بِرْتْرَان-دُومُورْغَان (Bertrand-De Morgan test).

اختبار بِرْتْرَان:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَسَلْسِلَة ذات حدود موجبة (أي أنَّ: $a_n > 0, \ \forall n \geqslant 1$). وبفرض:

$$B = \lim_{n\to\infty} \left[\ln(n) \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)\right],$$

بحيث $0 \leqslant B \leqslant \infty$. عندئذ:

(1) إذا كان $1 < B \leqslant \infty$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبة.

(2) إذا كان $0 \leqslant B < 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَباعِدة.

(3) إذا كان $B = 1$، فإنَّ اختبار بِرْتْرَان يفشل في تحديد تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

مثال 19:

لندرس، حسب قيم $p \in \mathbb{R}$، طبيعة المُتَسَلْسِلَة، ذات الحدود الموجبة، الآتية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p .$$

لنضع: $a_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$. إنَّ اختبار دَالامْبِيْر يفشل في تحديد طبيعة هذه المُتَسَلْسِلَة (تَحقَّقْ من ذلك!). لذلك سَنُطَبِّق اختبار رَابْ.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1\right)$$

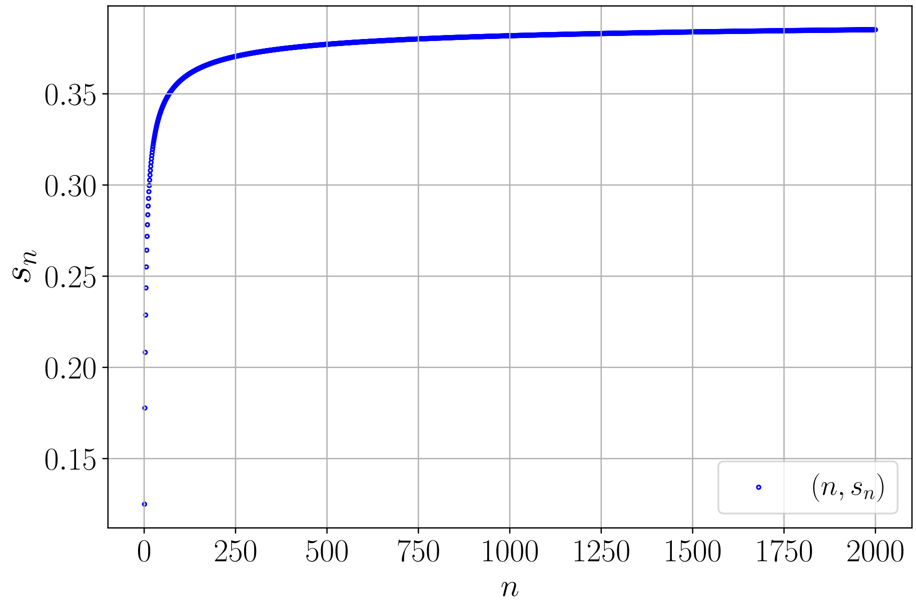
بفرض $x = \frac{1}{2n+1}$، نجد $n = \frac{1-x}{2x}$. وعندما $n \longrightarrow \infty$، نجد أنَّ $x \longrightarrow 0$. ومنه نجد أنَّ:

$$R = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-x}{2x}\cdot((1+x)^p - 1)\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{2}\cdot\frac{(1+x)^p-1}{x}\right) = \frac{p}{2}.$$

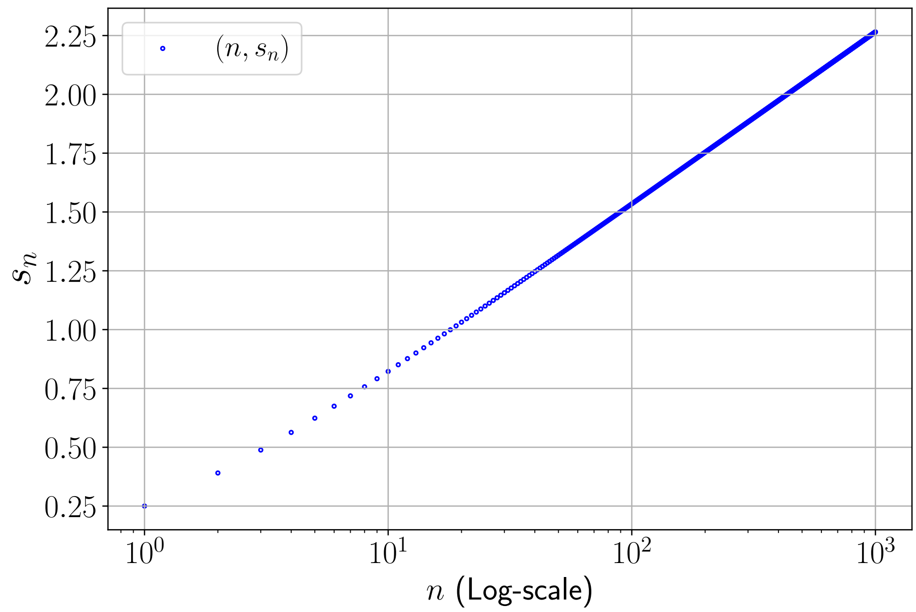
وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المَدْرُوسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$، تكون مُتَقَارِبَة عندما $p > 2$، ومُتَباعِدَة عندما $p < 2$. وعندما $p = 2$، فإنَّ اختبارَي دَالامْبِيْر ورَابْ يفشلان في تحديد طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$. لذلك سَنُطَبِّق اختبار بِرْتْرَان، لنجد:

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{n\to\infty}\ln(n)\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\ln(n)\cdot\left[n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2-1\right)-1\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\ln(n)\cdot\left[n\left(\frac{4n^4+8n+4}{4n^2+4n+1}-1\right)-1\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\ln(n)\cdot\left[n\left(\frac{4n+3}{4n^2+4n+1}\right)-1\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\ln(n)\cdot\left[\frac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1}-1\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\ln(n)\cdot\left(\frac{-n-1}{4n^2+4n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\cdot\frac{-1-\frac{1}{n}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = 0 < 1.
\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$ مُتَباعِدَة حسب اختبار بِرْتْرَان. ومما سبق نجد أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$، تكون مُتَقَارِبَة عندما $p > 2$ (انظر الشكل 20.1). ومُتَباعِدَة عندما $p \leqslant 2$ (انظر الشكل 21.1).



شكل 20.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 2000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^3$، في هذا الشكل لدينا $s_{2000} \approx 0.385174$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأن: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^3 \approx 0.4$.



شكل 21.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2$.

3.1 المُتَسَلْسِلَات المُتَنَاوِبَة

المُتَسَلْسِلَة المُتَنَاوِبَة لها الشكل الآتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

أو

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

حيث $a_n > 0$ مهما يكن $n \geqslant 1$، أي أنَّ كل حدَّين متجاورَين من حدودها مختلفين بالإشارة. لاختبار تَقارُب المُتَسَلْسِلَة المُتَنَاوِبَة نستخدم عادة الاختبار الآتي، والذي يدعى اختبار لايبْنِتْز.

اختبار لايبْنِتْز:

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$، حيث $a_n > 0$ مهما يكن $n \geqslant 1$، مُتَسَلْسِلَة مُتَنَاوِبَة. إذا كان $a_{n+1} \leqslant a_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ مُتقارِبَة.

مثال 20:

المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ مُتَنَاوِبَة، حيث: $a_n = \frac{1}{n} > 0$. إنَّ:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} = a_n, \ \forall n \geqslant 1.$$

كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المَدرُوسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ مُتَقارِبَة حسب اختبار لايبْنِتْز (انظر الشكل 22.1). كما أنَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) \approx 0.6931471806,$$

في الحقيقة، لدينا:

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k-1} dx = -\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-x)^{k-1} dx \\ &= -\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} \right) dx = -\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} dx \\ &= -\int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = -\ln 2 + \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx.\end{aligned}$$

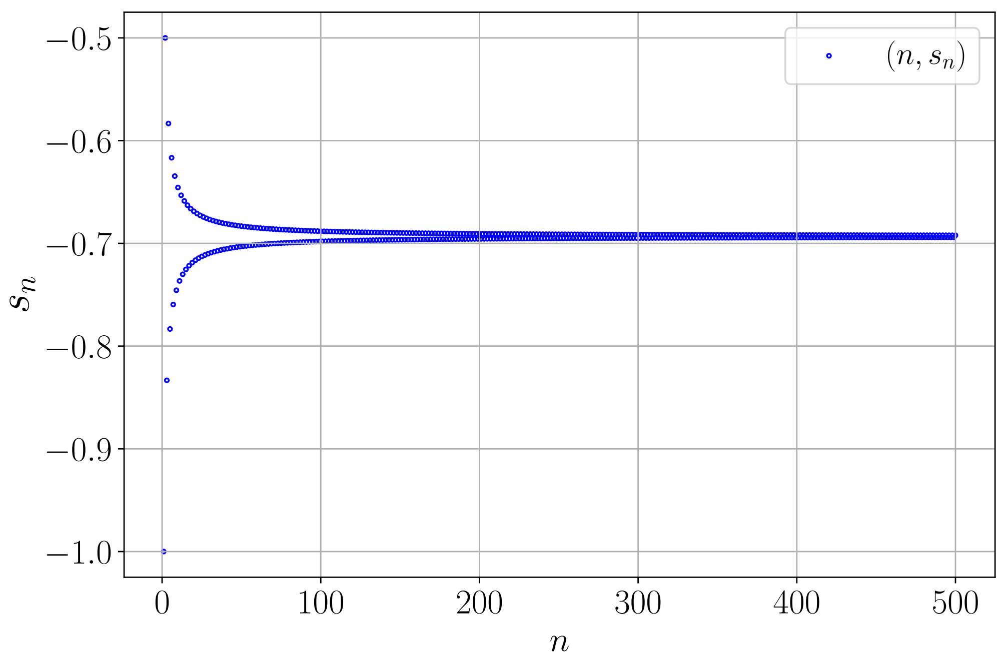
ومنه فإنَّ:

$$|s_n + \ln 2| = \left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{(-x)^n}{1+x} \right| dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

ومنه نجد:

$$\lim_{n\to\infty} (s_n + \ln 2) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = -\ln 2.$$

تُدْعى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ المُتَسَلْسِلَةَ التَّوافُقيَّة المُتَناوِبَةَ (alternating harmonic series).



شكل 22.1: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 500\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$، من أجل المُتَسَلْسِلَة المَدروسَة، يكون: $s_{10^7} \approx -0.6931471305$، $s_{10^8} \approx -0.6931471755$ و $s_{10^9} \approx -0.6931471800$، ومنه نجد أنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \approx -0.69$.

4.1 المُتَسَلْسِلَات ذات الحدود الكيفيَّة

المُتَسَلْسِلَة ذات الحدود الكيفيَّة، إشارات حدودها موجبة أو سالبة، توزيع هذه الإشارات قد يأخذ نمطًا محددًا، كحدود المُتَسَلْسِلَة المُتَنَاوِبَة مثلًا، أو تتوزَّع توزيعًا عشوائيًا. مثلًا:

$$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8 + a_9 + a_{10} + \dots$$

1.4.1 التَّقارُب بِالإِطْلَاق والتَّقارُب الشَّرطِي

تعريف 2:

نقول إنَّ المُتَسَلْسِلَة الكيفيَّة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق إذا وفقط إذا تقاربت مُتَسَلْسِلَة القيم المطلقة لحدودها، أي إذا وفقط إذا تقاربت المُتَسَلْسِلَة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots$$

مبرهنة 4:

إذا كانت المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مُتَقَارِبَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون مُتَقَارِبَة أيضًا. أي أنَّ المُتَسَلْسِلَة المُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق هي مُتَسَلْسِلَة مُتَقَارِبَة أيضًا.

ملاحظة 10:

إنَّ عكس المبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة. فإذا كانت المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مُتَبَاعِدَة، والمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَة، فإنَّنا نقول إنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَة شرطيًا. فعلى سبيل المثال: المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+5}$ مُتَقَارِبَة حسب اختبار لايبْنِتْز. إلا أنَّ المُتَسَلْسِلَة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3n+5} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$$

مُتَبَاعِدَة. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+5}$ مُتَقَارِبَة شرطيًا.

2.4.1 اختبارات التَّقارُب بِالإِطْلَاق

يمكن، لأجل المُتَسَلْسِلَات الكيفيَّة، استخدام الاختبارات التي تَمَّ استخدامها لأجل المُتَسَلْسِلَات ذات الحدود الموجبة، مثل اختبار دَالامْبِيْر، وكُوشِي، ورَابْ، وبِرْتْرَان، وتحديد فيما إذا كانت مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق أو مُتَقارِبَة شرطيًا أو مُتَباعِدَة.

اختبار دَالامْبِيْر (لأجل التَّقارُب بِالإِطْلَاق):

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَسَلْسِلَة عَدديَّة حقيقية حدودها أعدادٌ لا تساوي الصفر (أي: $a_n \neq 0,\ \forall n \geqslant 1$). وبفرض: $D = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$، بحيث: $0 \leqslant D \leqslant \infty$. عندئذ:

(1) إذا كان $0 \leqslant D < 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق (فهي مُتَقارِبَة).

(2) إذا كان $1 < D \leqslant \infty$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَباعِدَة.

(3) إذا كان $D = 1$، فإنَّ اختبار دَالامْبِيْر يفشل في تحديد تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

اختبار كُوشِي (لأجل التَّقارُب بالإطلاق):

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَسَلْسِلَة حدودها أعدادٌ حقيقية. وبفرض: $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$، بحيث: $0 \leqslant C \leqslant \infty$. عندئذ:

(1) إذا كان $0 \leqslant C < 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق (فهي مُتَقارِبَة).

(2) إذا كان $C > 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَباعِدَة.

(3) إذا كان $C = 1$، فإنَّ اختبار كُوشِي يفشل في تحديد تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

اختبار رَاب (لأجل التَّقارُب بالإطلاق):

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَسَلْسِلَة عَدَدِيَّة حدودها أعداد حقيقية لا تساوي الصفر (أي: $a_n \neq 0,\ \forall n \geqslant 1$).
وبفرض: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right)\right]$، بحيث: $-\infty \leqslant R \leqslant \infty$. عندئذ:

(1) إذا كان $R > 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتقارِبَة بِالإِطْلَاق (فهي مُتَقَارِبَة).

(2) إذا كان $0 \leqslant R < 1$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتقارِبَة شرطيًا أو متباعِدَة.

(4) إذا كان $R < 0$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَبَاعِدَة.

(3) إذا كان $R = 1$، فإنَّ اختبار رَابْ يفشل في تحديد تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

مثال 21:

لندرس، حسب قيم $x \in \mathbb{R}$، تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)x^{2n-1}}.$$

بوضع: $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n-1)x^{2n-1}}$، نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)x^{2n-1}}{(2n+1)x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

وبذلك نجد أنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة تكون مُتَقارِبَة (وبالإطلاق) عندما: $\frac{1}{x^2} < 1$، أي عندما: $x \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$. وتكون (أي المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة) مُتَباعِدَة عندما: $x \in]-1, 1[$.

عندما يكون $x = -1$، نجد المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{1-n}}{2n-1}$، وهي مُتَسَلْسِلَة مُتقارِبَة حسب اختبار لايبْنِتْز، ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة شرطيًّا عندما $x = -1$.

وعندما يكون $x = 1$، نجد المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)}$، وهي مُتَسَلْسِلَة مُتَقارِبَة أيضًا حسب اختبار لايبْنِتْز، ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة شرطيًّا عندما $x = 1$.

وبالتَّالي فإنَّه مما سبق نجد أنَّ المُتَسَلْسِلَة المَدرُوسَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)x^{2n-1}}$، تكون مُتَقارِبَة عندما: $x \in]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$، ومُتَباعِدَة عندما: $x \in]-1, 1[$.

مثال 22:

لأجل المُتَسَلْسِلَة: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)!}{4^n\cdot(n!)^2}$. نضع: $a_n=(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)!}{4^n\cdot(n!)^2}$.

إنَّ اختبار دَالامْبِيْر يفشل في تحديد طبيعة هذه المُتَسَلْسِلَة (تَحَقَّقْ من ذلك!). لنطبق اختبار رَابْ.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+1)!\cdot 4^{n+1}\cdot(n+1)^2\cdot(n!)^2}{4^n\cdot(n!)^2\cdot(2n+3)!}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{(2n+1)!}\cdot 4\cdot\cancel{4^n}\cdot(n+1)^2\cdot\cancel{(n!)^2}}{\cancel{4^n}\cdot\cancel{(n!)^2}\cdot(2n+3)\cdot(2n+2)\cdot\cancel{(2n+1)!}}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4(n+1)^2}{2(2n+3)(n+1)}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2(n+1)}{2n+3}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+3}=-\frac{1}{2}<1.
\end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المَدْرُوسَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)!}{4^n\cdot(n!)^2}$ مُتَبَاعِدَة حسب اختبار رَابْ.

3.4.1 خواص المُتَسَلْسِلَات المُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق

تَتَمَتَّع المُتَسَلْسِلَات المُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق بخواص هامة، إذ إنَّه يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها كما هو الحال لدى التعامل مع المَجَامِيع المُنْتَهِيَة، الأمر الذي لا نستطيع إجراؤه مع المُتَسَلْسِلَات غير المُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق. الأمر الذي توضحه المبرهنة الآتية.

مبرهنة 5:

لا يتغير نوع أو مجموع مُتَسَلْسِلَة مُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق ، بتَغْيِيْر ترتيب حدودها.

ملاحظة 11:

المبرهنة السابقة صحيحة فقط من أجل المُتَسَلْسِلَات المُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق. إذ إنَّ تَغْيِيْر ترتيب الحدود في مُتَسَلْسِلَة مُتَقَارِبَة شرطيًا قد يُغيِّر نوعها أو مجموعها. فعلى سبيل المثال لأجل المُتَسَلْسِلَة

التَّوافُقِيَّة المُتَنَاوِبَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$، والمُتَقارِبَة شرطيًا. بحساب المجموع الجُزْئي s_{2n}، نجد:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} \\ &= \left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k-1)}. \end{aligned}$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ يمكن كتابتها بالشكل: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$. والمُتَسَلْسِلَة الأخيرة مُتَقارِبَة بالإِطْلَاق، حسب اختبار المُقارَنة الثاني (نقارن مع المُتَسَلْسِلَة المُتَقارِبَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). وبذلك نجد أنَّ تَغْيِير ترتيب حدود مُتَسَلْسِلَة مُتَقارِبَة شرطيًا، أدَّى إلى مُتَسَلْسِلَة مُتَقارِبَة بالإِطْلَاق.

لنجري الآن تغييرًا في ترتيب حدود المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ المُتَقارِبَة (شرطيًا) والتي مجموعها يساوي $\ln 2$ (انظر المثال 22)، فنجد:

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

وهذا تناقض. ومنه نجد أنَّ تَغْيِير ترتيب حدود مُتَسَلْسِلَة ليست مُتَقارِبَة بالإِطْلَاق يؤثر على نوعها أو مجموعها، لذلك يَتوجَّب الحذر عند التَّعامُل مع المُتَسَلْسِلَات الحَقِيقِيَّة ذات الحدود غير الموجبة. وللاستزادَة يُمكِن الاطلاع على [12, 13].

مبرهنة 6:

لتكن $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ مُتسلسِلَتَيْن مُتقَارِبَتَيْن بِالإِطْلَاق، ومجموع كل منهما a و b على الترتيب. عندئذٍ:

1. المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$، والناتجة من جمع المُتسلسِلَتَيْن $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$، بجمع كل حد مع

مقابله، تكون مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق، ومجموعها $a+b$.

2. المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$، والناتجة من جداء المُتَسلسِلتَيْن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$، وذلك بضرب كل حد في إحداهما بجميع حدود المُتَسَلْسِلَة الثانية، تكون مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق، ومجموعها $a \cdot b$.

تجدر الإشارة إلى أن جداء كُوشِي لِمُتَسلسِلتَيْن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ هو أحد الجداءات الشهيرة. ويعطى بالصيغة الآتية:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0) \\ &= \underbrace{a_0b_0}_{n=0} + \underbrace{a_0b_1 + a_1b_0}_{n=1} + \underbrace{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0}_{n=2} + \ldots\end{aligned}$$

5.1 المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)q^n$.

في هذا القسم سندرس طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)q^n$، حيث $P(n)$ كثيرة حدود بـ n و $q \in \mathbb{R}^*$ [2]. من أجل ذلك لتكن $a_0, a_1, \ldots, a_m$ أعداد حقيقية، ولتكن

$$P(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_m n^m$$

كثيرة حدود بـ n من الدرجة m. نلاحظ أنَّه لدراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)q^n$ يتوجب علينا أولًا دراسة طبيعة المُتَسلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} n^r q^n$ من أجل $r \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$.
نلاحظ أنَّه بوضع $a_n := n^r q^n$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right)^r |q| = |q|.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} n^r q^n$، من أجل $r \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$، مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي إذا كان $|q| < 1$، ومُتَباعِدَة خلاف ذلك. لكن يُمكِنُنا دراسة التَّقارُب والتَّباعُد بطريقة أخرى، وذلك بهدف إيجاد المجموع للمُتَسلسِلَة في حالة التَّقارُب، بالشكل الآتي.

(1) من أجل $r = 1$، يكون لدينا المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$. والحد العام s_n لِمُتَتالِيَة المَجَاميْع الجُزئيَّة

$\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، لهذه المُتَسَلْسِلَة، يكون بالشكل: $s_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k$. فإذا كان $q = 1$ فإنَّ:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

لنفرض أن $q \neq 1$. نعلم أن:

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad (1.1)$$

باشتقاق طَرَفَي (1.1) بالنسبة لـ q نجد:

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{nq^n(q-1)+1-q^n}{(1-q)^2}. \qquad (2.1)$$

نضرب طَرَفَي (2.1) بـ q فنجد:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(1-q)^2} = \frac{(nq-(n+1))q^{n+1}+q}{(1-q)^2} \\ &= \frac{(n(q-1)-1)q^{n+1}+q}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

لنميز الحالات الآتية:

(1) إذا كان $|q| < 1$، فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} nq^{n+2} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (n+1)q^{n+1} = 0.$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

وبذلك تكون المُتَسَلْسِلَة المَدْروسَة مُتَقارِبَة في هذه الحالة، ونكتب:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \qquad |q| < 1.$$

(2) إذا كان $q = 1$، فإنَّ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty.$$

والمُتَسَلْسِلَة المَدْروسَة مُتَباعِدَة في هذه الحالة.

(3) إذا كان $q=-1$، فإنَّ:

$$s_n=\frac{(-1)^{n+1}(-2n-1)-1}{4}.$$

عندما يكون n عدد زوجي فإنه يكون:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-(-2n-1)-1}{4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty.$$

وعندما يكون n عدد فردي فإنه يكون:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2n-1)-1}{4}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\infty.$$

وبذلك يكون لدينا متتاليتين جزئيَّتين لهما نهايتين مختلفتين، ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المَدرُوسَة مُتَباعِدَة. ونقول في هذه الحالة إنَّ المُتَسَلْسِلَة المَدرُوسَة مُتأَرجِحَة بين $-\infty$ و ∞.

(4) إذا كان $q>1$، فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1}=\infty,\qquad \lim_{n\to\infty} n(q-1)-1=\infty.$$

ومنه: $\lim_{n\to\infty} s_n=\infty$. والمُتَسَلْسِلَة مُتَباعِدَة في هذه الحالة.

(5) إذا كان $q<-1$، فإنَّ q^{n+1} تَتأَرجَحُ بين $-\infty$ و ∞، ومنه فالمُتَسَلْسِلَة تَتأَرجَحُ بين $-\infty$ و ∞.

(2) من أجل $r=2$ يكون لدينا المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^n$. الحد العام s_n لمُتَتَالِيَة المَجامِيع الجُزئيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، لهذه المُتَسَلْسِلَة، يكون بالشكل: $s_n=\sum_{k=1}^{n} k^2q^k$. فإذا كان $q=1$ فإنَّ:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

لنفرض أن $q\neq 1$. نعلم أنَّ:

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k=\frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(1-q)^2}. \tag{3.1}$$

باشتقاق طَرَفَي (3.1) بالنسبة لـ q نجد:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2q^{k-1}=\frac{-n^2q^{n+2}-(2n^2+2n-1)q^{n+1}-(n+1)^2q^n+2q}{(1-q)^3}. \tag{4.1}$$

نضرب طَرَفَيْ (4.1) بـ q فنجد:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{-n^2q^{n+3}-(2n^2+2n-1)q^{n+2}-(n+1)^2q^{n+1}+2q^2}{(1-q)^3} \\ &= \frac{q^{n+1}\left(-n^2(q+1)^2-2n(q+1)^2+q-1\right)+2q^2}{(1-q)^3}. \end{aligned}$$

لنميز الحالات الآتية:

(1) إذا كان $|q|<1$، فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} n^2q^{n+3} = \lim_{n\to\infty}(2n^2+2n-1)q^{n+2} = \lim_{n\to\infty}(n+1)^2q^{n+1} = 0.$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{2q^2}{(1-q)^2}.$$

وبذلك تكون المُتَسَلْسِلَة المَدروسَة مُتَقارِبَة في هذه الحالة، ونكتب:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3}, \qquad |q|<1.$$

(2) إذا كان $q=1$، فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \infty.$$

والمُتَسَلْسِلَة المَدروسَة مُتَباعِدَة في هذه الحالة.

(3) إذا كان $q=-1$، فإنَّ: $s_n = \frac{(-1)^{n+1}(-2)+2}{8}$، والمُتَسَلْسِلَة مُتأَرجِحَة بين العددين 0 و $\frac{1}{2}$.

(4) إذا كان $q>1$، فإنَّ: $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$، والمُتَسَلْسِلَة مُتَباعِدَة في هذه الحالة.

(5) إذا كان $q<-1$، فإنَّ q^{n+1} تَتَأَرجَحُ بين $-\infty$ و ∞، كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} -n^2(q+1)^2-2n(q+1)^2+q-1 = -\infty.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة تَتأَرجَحُ بين $-\infty$ و ∞.

(3) ويمكن بطريقة مماثلة لما سبق دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3q^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^4q^n, \quad \dots$$

وبالتَّالي من أجل المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)q^n$، حيث

$$P(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_m n^m,$$

الحد العام s_n، لمُتَتَالِيَة المَجَامِيْع الجُزْئِيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، يكون بالشكل:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} P(k)q^k = a_0 \sum_{k=1}^{n} q^k + a_1 \sum_{k=1}^{n} kq^k + a_2 \sum_{k=1}^{n} k^2 q^k + \ldots + a_m \sum_{k=1}^{n} k^m q^k.$$

والمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)q^n$ تكون مُتَقَارِبَة إذا كانت جميع المُتَسَلْسِلَات

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nq^n, \quad \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^m q^n$$

مُتَقَارِبَة (أي عندما $|q| < 1$). ومجموعها يكون بالشكل:

$$s = \sum_{i=0}^{m} a_i s^{[i]} = a_0 s^{[0]} + a_1 s^{[1]} + \ldots + a_m s^{[m]},$$

حيث:

$$s^{[0]} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad s^{[1]} = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2},$$
$$s^{[2]} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3}, \qquad \ldots$$

6.1 المُتَسَلْسِلَات العشريَّة

سنعرض في هذا القسم مفهوم المُتَسَلْسِلَات العشريَّة والمُتَسَلْسِلَات العشريَّة الدَّوريَّة. إذ تكمن أهمية المُتَسَلْسِلَات العشريَّة في التقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الحَقيقيَّة. سنثبت أنه لكل عدد حقيقي توجد مُتَسَلْسِلَة عشريَّة وحيدة مُتَقَارِبَة منه. كما أنَّ كل مُتَسَلْسِلَة عشريَّة دوريَّة هي مُتَسَلْسِلَة مُتَقَارِبَة من عدد كسري (عادي).

تعريف 3:

نقول إنَّ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ مُتَسَلْسِلَة عشريَّة إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

1. $a_0 \in \mathbb{Z}$ عدد صحيح (موجب أو سالب أو معدوم).

2. مهما يكن $n \geqslant 1$ فإنَّ a_n عدد صحيح محصور بين الصفر و 9، أي:

$$a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}; \ \forall n \geqslant 1.$$

3. مهما يكن r عدد صحيح موجب، فإنَّه يوجد $n \geqslant r$، بحيث: $a_n \neq 9$. أي لا يمكن أن تصبح جميع الأعداد a_n، ابتداء من رتبة معينة مساوية للعدد 9.

إن هذا الشرط ضروري لضمان وحدانية تمثيل الأعداد الحقيقية. فمن المعلوم (على سبيل المثال) أنَّ $1 = 0.9999999\dots$ (انظر [21]). ولذلك فإن الشرط 3 يضمن عدم ظهور مثل هذه الحالة، والتي يكون فيها $a_n = 9$ لأجل كل $n \geqslant r$ و r عدد مُحدَّد.

قضية 1:

كل مُتَسَلسِلَة عشريَّة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ هي مُتسَلسِلَة مُتقارِبَة.

الإثبات: إن:

$$\frac{a_n}{10^n} \leqslant \frac{9}{10^n}; \quad n \geqslant 1.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ هَندَسيَّة، أساسها $q = \frac{1}{10} < 1$ فهي مُتَقارِبَة. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ مُتَقارِبَة حسب اختبار المقارنة الأول. وبالتالي فإن المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ مُتَقارِبَة لأن إضافة (أو حذف) عدد منته من الحدود لا يؤثر على طبيعة المُتَسَلْسِلَة المدروسة.

نرمز لناتج المُتَسَلْسِلَة العشريَّة المُتَقارِبَة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ بالرمز: $a := a_0.a_1a_2a_3\dots a_n\dots$

ملاحظة 12:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ مُتسَلْسِلَة عشريَّة. استنادًا إلى الشرط الثاني في تعريف المُتَسَلْسِلَة العشريَّة، نجد:

$$\frac{a_n}{10^n} \leqslant \frac{9}{10^n}; \quad \forall n \geqslant 1.$$

وكذلك استنادًا إلى الشرط الثالث نجد أنَّه يوجد $k \geqslant n+1$ من أجل $n \geqslant 0$ بحيث:

$$\frac{a_k}{10^k} < \frac{9}{10^n}; \quad \forall k \geqslant n+1.$$

ومنه إذا رمزنا لناتج الباقي النُّوني $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$ بالرمز R_n، نجد:

$$0 \leqslant R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{9}{10^k} = \frac{\frac{9}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^n}.$$

ومنه:

$$s_n \leqslant s_n + R_n < s_n + \frac{1}{10^n}.$$

حيث: $s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{10^k} = a_0.a_1a_2\ldots a_n$ هو المجموع الجُزْئي النُّوني للمُتَسَلْسِلَة العشريَّة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$.
ومنه بما أنَّ:

$$a_0.a_1a_2\ldots a_n\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n} = s_n + R_n,$$

فإنَّ:

$$s_n \leqslant a < s_n + \frac{1}{10^n}; \quad \forall n \geqslant 0. \tag{5.1}$$

تدل العلاقة (5.1) على أنه مهما يكن $n \geqslant 0$ عدد صحيح موجب أو معدوم فإنَّ المجموع الجُزْئي النُّوني s_n إمَّا أن يكون مساويًا لناتج المُتَسَلْسِلَة العشريَّة أو يمثل قيمة تقريبية (بالنقص) لهذا الناتج بخطأ يقل عن $\frac{1}{10^n}$.

قضية 2:

إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ مُتَسَلْسِلَة عشريَّة ناتجها a و $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}$ متَسَلْسِلَة عشريَّة ناتجها b، وإذا كان: $a_n = b_n, \forall n < r$، و $a_r < b_r$، حيث r عدد صحيح موجب أو معدوم. عندئذ فإنَّ $a < b$.

الإثبات: نرمز بـ s_n للمجموع الجُزْئي النُّوني للمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$، و بـ s'_n للمجموع الجُزْئي النُّوني للمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}$. عندئذ حسب الملاحظة 12 يكون:

$$s_r \leqslant a < s_r + \frac{1}{10^r}, \quad s'_r \leqslant b < s'_r + \frac{1}{10^r}.$$

فإذا كان $r = 0$ فإنَّ:

$$s_0 \leqslant a < s_0 + 1, \quad s'_0 \leqslant b < s'_0 + 1.$$

لكن: $s_0 = a_0$ و $s'_0 = b_0$ ومنه:

$$b_0 \leqslant b < b_0 + 1, \quad a_0 \leqslant a < a_0 + 1.$$

وبما أنَّ $a_r < b_r$ و $r = 0$، فإنَّ: $a_0 < b_0$. ومنه: $a_0 + 1 \leqslant b_0$ (حيث a_0 و b_0 أعداد صحيحة)، وبالتَّالي:

$$a < a_0 + 1 \leqslant b_0 \leqslant b.$$

ومنه نجد المطلوب.

أمَّا إذا كان $r > 0$، فعندئذ يكون:

$$s_r = s_{r-1} + \frac{a_r}{10^r}, \qquad s'_r = s'_{r-1} + \frac{b_r}{10^r}.$$

وبما أنَّ: $a_r < b_r$ والطرفان عددان صحيحان، فإنَّ: $a_r + 1 \leqslant b_r$. ومنه:

$$\frac{a_r}{10^r} + \frac{1}{10^r} \leqslant \frac{b_r}{10^r}.$$

وبما أنَّ: $a_n = b_n; \forall n < r$، فإنَّ: $s_{r-1} = s'_{r-1}$. وبالتَّالي:

$$s_{r-1} + \frac{a_r}{10^r} + \frac{1}{10^r} \leqslant s'_{r-1} + \frac{b_r}{10^r}.$$

أي: $s_r + \frac{1}{10^r} \leqslant s'_r$. وبهذا يصبح لدينا:

$$a < s_r + \frac{1}{10^r} \leqslant s'_r \leqslant b.$$

ومنه: $a < b$. وهو المطلوب أيضًا.

ملاحظة 13:

من القضية 2 نجد أنَّه إذا كان لدينا مُتَسَلْسِلَتَان عشرِيَّتَان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$، ناتجاهما: $a = a_0.a_1a_2\ldots$ و $b = b_0.b_1b_2\ldots$، وإذا أردنا أن نقارن بين هذين الناتجين، فيكفي أن نبدأ بمقارنة a_0 و b_0. فإذا كان $a_0 < b_0$ فإنَّ $a < b$ (مهما تكن الأعداد $a_1, a_2, \ldots$ والأعداد $b_1, b_2, \ldots$). وكذلك إذا كان $b_0 < a_0$ فإنَّ $b < a$. أمَّا إذا كان $a_0 = b_0$ فإنَّنا نقارن a_1 و b_1. فإذا كان $a_1 < b_1$ فإنَّ $a < b$ (مهما تكن الأعداد $a_2, a_3, \ldots$ والأعداد $b_2, b_3, \ldots$). وكذلك إذا كان $b_1 < a_1$ فإنَّ $b < a$. وإذا كان $a_0 = b_0$ و $a_1 = b_1$ فإنَّنا نقارن a_2 و b_2. وهكذا ...

قضية 3:

إذا كانت المُتَسَلْسِلَتَان العشرِيَّتَان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ مختلفتين، فإنَّ ناتجيهما يكونان مختلفين

(مع العلم بأن المُتسَلْسلَتان تَتسَاوَيَان إذا كان $a_n = b_n$ مهما يكن $n \geqslant 0$، وتختلفان إذا وُجِدَ $n \geqslant 0$ بحيث: $a_n \neq b_n$).

الإثبات: لتكن A_1 المجموعة المؤلفة من قيم n التي من أجلها $a_n \neq b_n$. إن A_1 غير خالية (فرضًا، إذ إنَّ المُتَسَلسلَتَيْن مختلفتان). لنرمز بـ r (وهو عدد طبيعي) لأصغر عنصر في A_1. ومنه يكون $r \in A_1$ و $n \notin A_1$ لأجل كل $n < r$. وبالتَّالي فإنَّ: $a_r \neq b_r$ و $a_n = b_n;\ \forall n < r$. وبهذا يكون لدينا احتمالان فقط. إمَّا أن يكون $a_r < b_r$ و $a_n = b_n;\ \forall n < r$، ومنه يكون $a < b$. أو $b_r < a_r$ و $a_n = b_n;\ \forall n < r$، ومنه يكون $b < a$. وبالتَّالي نجد أنَّه في كلا الحالتين $a \neq b$.

نأتي الآن إلى إثبات مبرهنة أساسية، والتي من خلالها يمكن بدلالة المُتَسَلْسِلَات العشريَّة تمثيل مجموعة الأعداد الحَقيقيَّة.

لنذكر في البداية أنه إذا كان x عددًا حقيقيًا فإنَّنا ندعو العدد الصحيح y الذي يحقق: $y \leqslant x < y+1$ أو $0 \leqslant x - y < 1$، الجزء الصحيح لـ x، ونرمز له بـ $y = [x]$. وهو أكبر الأعداد الصحيحة التي هي أصغر أو تساوي x. مثلًا: $[3.7] = 3$ و $[-3.7] = -4$.

مبرهنة 7:

ليكن $c \in \mathbb{R}$ عدد حقيقي. يوجد مُتَسَلْسِلَة عشريَّة واحدة فقط مُتَقَارِبَة من c.

الإثبات: نرمز للعدد المفروض c بالرمز c_0، ولنضع: $a_0 := [c_0]$، ثم نرمز للعدد $10(c_0 - a_0)$ بالرمز c_1، ولنضع: $a_1 = [c_1]$. ثم نرمز للعدد $10(c_1 - a_1)$ بالرمز c_2، ولنضع: $a_2 = [c_2]$. نتابع بالتدريج لنجد العددين a_n و c_n. نرمز للعدد $10(c_n - a_n)$ بالرمز c_{n+1}، ولنضع: $a_{n+1} = [c_{n+1}]$. نتيجة لذلك نحصل على المُتَتَالِيَتَيْن العَدَديَّتيْن $(a_n)_{n\geqslant 0}$ و $(c_n)_{n\geqslant 0}$، بحيث:

$$\begin{aligned}
c_0 &= c,\\
c_1 &= 10(c_0 - a_0) = 10c - 10a_0,\\
c_2 &= 10(c_1 - a_1) = 10^2c + 10^2a_0 - 10a_1,\\
c_3 &= 10(c_2 - a_2) = 10^3c - 10^3a_0 - 10^2a_1 - 10a_2.
\end{aligned}$$

لنثبت بالتَّدريج (الاستقراء الرياضي) أن:

$$c_n = 10^n c - \sum_{k=0}^{n-1} 10^{n-k} a_k, \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{6.1}$$

وجدنا أنَّ (6.1) صحيحة من أجل $n = 0, 1, 2, 3$. لنفرض أنَّ (6.1) صحيحة من أجل n، ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$. لدينا: $c_{n+1} = 10(c_n - a_n)$، ومنه من (6.1) نجد أنَّ:

$$c_{n+1} = 10^{n+1}c - \sum_{k=0}^{n-1} 10^{n+1-k}a_k - 10a_n = 10^{n+1} - c\sum_{k=0}^{n} 10^{n+1-k}a_k.$$

ومنه فإنَّ (6.1) صحيحة من أجل $n+1$. فهي صحيحة من أجل كل $n \geqslant 0$.
بما أنَّ الجزء الصحيح لـ c_n هو a_n، فإنَّ: $0 \leqslant c_n - a_n < 1$، ومنه من (6.1) نجد أنَّ:

$$0 \leqslant 10^n c - \sum_{k=0}^{n-1} 10^{n-k}a_k - a_n < 1.$$

أو:

$$0 \leqslant 10^n c - \sum_{k=0}^{n} 10^{n-k}a_k < 1.$$

وبالتقسيم على 10^n نجد:

$$0 \leqslant c - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}. \qquad (7.1)$$

لنشكل الآن من المُتَتَالِيَة الحَقِيقِيَّة اللانهائية $(a_n)_{n\geqslant 0}$ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. نلاحظ أنَّ:

- المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ مُتَقَارِبَة من c. في الحقيقة إذا رمزنا بـ s_n للمجموع الجُزْئِي $\sum_{n=0}^{n} \frac{a_n}{10^n}$، فإنَّه من (7.1) نجد أنَّ:

$$0 \leqslant c - s_n < \frac{1}{10^n} \Longrightarrow c - \frac{1}{10^n} < s_n \leqslant c.$$

وبما أنَّ: $\lim_{n\to\infty} \left(c - \frac{1}{10^n}\right) = c$، فإنَّ: $\lim_{n\to\infty} s_n = c$. وهو المطلوب.

- المُتَسَلْسِلَة السابقة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ عشريَّة. إذ إنَّ a_0 عدد صحيح لأنَّه الجزء الصحيح لـ c، ومنه فإنَّ الشرط الأول من التعريف 3 محقق.
وبما أنَّ: $a_{n-1} = [c_{n-1}]; \forall n \geqslant 1$، فإنَّ $0 \leqslant c_{n-1} - a_{n-1} < 1$، ومنه:

$$0 \leqslant 10(c_{n-1} - a_{n-1}) < 10.$$

أي: $0 \leqslant c_n < 10$. وبما أنَّ: $a_n = [c_n]$ فإنَّ: $a_n \leqslant c_n$، ومنه $a_n < 10$، وكذلك $a_{n+1} < c_n$، وبالتَّالي $a_n + 1 > 0$ أي $a_n > -1$. وبذلك يكون لدينا: $-1 < a_n < 10$. وبما أنَّ a_n عدد صحيح، فإنَّ: $0 \leqslant a_n \leqslant 9$. ومنه فإنَّ الشرط الثاني من التعريف 3 محقق أيضًا.

لنفرض الآن مؤقتًا أنه:

$$\exists r; \forall n > r: \ a_n = 9.$$

ومنه يصبح الباقي الذي رتبته r في المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$، أي $\sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$، مساويًا لـ $\sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$، وهذه مُتَسَلْسِلَة هندسيَّة أساسها $\frac{1}{10}$ وحدُّها الأول $\frac{9}{10^{r+1}}$ ومنه فإنَّ:

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{\frac{9}{10^{r+1}}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^r}.$$

لنرمز بـ R_n لناتج الباقي النُّوني في المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$، ومنه: $R_n = \frac{1}{10^n}$. من (5.1) نجد أنَّ: $0 \leqslant c - s_n < \frac{1}{10^n}$. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة العشريَّة مُتَقَارِبَة من c فإنَّ: $s_n + R_n = c$، أي: $c - s_n = R_n$. ومنه: $0 \leqslant R_n < \frac{1}{10^n}$. وبما أنَّ هذا صحيح من أجل جميع قيم $n \geqslant 0$، فإنَّ: $R_n < \frac{1}{10^n}$. وبهذا يصبح لدينا: $R_n = \frac{1}{10^r}$ و $R_n < \frac{1}{10^r}$ وهذا تناقض. ومنه فإنَّ الفرض المؤقت خاطئ، والشرط الثالث من التعريف 3 محقق أيضًا. والمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ عشريَّة مُتَقَارِبَة من c.

وبذلك نكون قد أثبتنا أنه يوجد مُتَسَلْسِلَة عشريَّة مُتَقَارِبَة من العدد الحقيقي المفروض c. وواضح أنه لا يمكن أن توجد مُتَسَلْسِلَة عشريَّة أخرى مُتَقَارِبَة من c. لأن وجود مُتَسَلْسِلَتين عشريَّتين مُختلفتين مُتقاربتين من c مستحيل حسب القضية 3.

1.6.1 المُتَسَلْسِلَات العشريَّة الدَّوريَّة

تعريف 4:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ مُتَسَلْسِلَة عشريَّة، إذا استطعنا أن نجد عددًا صحيحًا m (موجبًا أو معدومًا)، و r عددًا صحيحًا موجبًا، بحيث:

$$a_n = a_{n+r}, \quad \forall n \geqslant m.$$

فإنَّنا نقول إن المُتَسَلْسِلَة العشريَّة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ دوريَّة.

من الواضح أنه إذا كان الشرط السابق محققًا، فإنَّ:

$$a_n = a_{n+r} = a_{n+2r} = a_{n+3r} = \dots \quad \forall n \geqslant m.$$

أي:

$$a_n = a_{n+kr}, \quad \forall n \geqslant m, k > 0.$$

فيما سيأتي سنبرهن أنه يوجد تقابل بين مجموعة الأعداد العادية (الكسرية) والمُتَسَلْسِلَات العشريَّة الدَّوريَّة. إذ إنَّه مقابل كل عدد عادي يوجد مُتَسَلْسِلَة عشريَّة دوريَّة مُتَقَارِبَة منه.

مبرهنة 8:

إذا كانت المُتَسَلْسِلَة العشريَّة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ دوريَّة، فإنَّ ناتجها عدد عادي.

الإثبات: بما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ دوريَّة فإنَّه يوجد عدد صحيح $m \geqslant 0$ و $r > 0$ عدد صحيح، بحيث: $\forall n \geqslant m \quad a_n = a_{n+r},$. لنحذف من المُتَسَلْسِلَة المُتَقَارِبَة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ جميع الحدود التي تقل رتبتها عن m (إن وُجِدَت)، فنحصل على مُتَسَلْسِلَة مُتَقَارِبَة أيضًا. وبما أنَّ $a_n \geqslant 0$ مهما يكن $n \geqslant 1$ فإنَّ دمج بعض حدود هذه المُتَسَلْسِلَة المُتَقَارِبَة لا يؤثر على تَقَارُبها ولا يغير ناتجها. وبالتَّالي إذا وضعنا من أجل جميع القيم الصحيحة الموجبة لـ n:

$$b_0 := \sum_{k=m}^{m+r-1} \frac{a_k}{10^k}, \quad b_1 := \sum_{k=m+r}^{m+2r-1} \frac{a_k}{10^k}, \quad b_n := \sum_{k=m+nr}^{m+(n+1)r-1} \frac{a_k}{10^k}, \quad \dots$$

فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ تكون مُتَقَارِبَة، وناتج $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ يساوي ناتج $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. لكن:

$$b_n = \sum_{k=m}^{m+r-1} \frac{a_{k+nr}}{10^{k+nr}} = \frac{1}{10^{nr}} \sum_{k=m}^{m+r-1} \frac{a_{k+nr}}{10^k}.$$

وبما أنَّ: $a_{k+nr} = a_k, \forall k \geqslant m$، فإنَّ:

$$b_n = \frac{1}{10^{nr}} \sum_{k=m}^{m+r-1} \frac{a_k}{10^k}.$$

وإذا رمزنا للمجموع المنتهي $\sum_{k=m}^{m+r-1} \frac{a_k}{10^k}$ بالرمز b، فإنَّ: $b_n = \frac{b}{10^{nr}}$، ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b}{10^{nr}}.$$

أي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^r}\right)^n = \frac{b10^r}{10^r - 1}.$$

لكن: a_n عدد صحيح (مهما يكن $n \geqslant 0$)، ومنه فإنَّ $\frac{a_n}{10^n}$ عدد عادي. ومنه فإنَّ b عدد عادي لأنه يساوي مجموع منته لأعداد عادية، وبالتَّالي فإنَّ ناتج $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ عدد عادي أيضًا. نميز حالتين:

(1) إذا كان: $m=0$ فإنَّ ناتج $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ يساوي ناتج $\sum_{n=m}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$، ومنه نجد المطلوب.

(2) إذا كان $m>0$، فعندئذ يكون:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{a_n}{10^n}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}.$$

والحد الأول في المجموع السابق عدد عادي لأنه مجموع منته من الأعداد العادية. والحد الثاني عدد عادي كما أثبتنا في الأعلى، ومنه فالمجموع عدد عادي، وهو المطلوب أيضًا.

ملاحظة 14:

إن الإثبات السابق للمبرهنة 8 يتضمن طريقة حساب ناتج المُتَسَلْسِلَة العشريَّة الدَّوريَّة، وذلك بحساب المجموعين $\sum_{n=0}^{m-1}\frac{a_n}{10^n}$ و $\sum_{n=m}^{m+r-1}\frac{a_n}{10^n}$، لنجد أنَّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{a_n}{10^n}+\frac{10^r}{10^r-1}\sum_{n=m}^{m+r-1}\frac{a_n}{10^n}.$$

إذا كانت المُتَسَلْسِلَة العشريَّة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ دوريَّة، وتحقق الشرط:

$$a_n=a_{n+r};\qquad \forall n\geqslant m.$$

فإنَّنا نرمز لناتجها بالرمز المختصر:

$$a_0.a_1a_2a_3\dots a_{m-1}\overline{a_ma_{m+1}\dots a_{m+r-1}}.$$

ومنه نجد:

$$\begin{aligned}a_0.a_1\dots a_{m-1}\overline{a_m\dots a_{m+r-1}}=&a_0.a_1\dots a_{m-1}+\\&+\frac{10^r}{10^r-1}\left(0.\underbrace{00\dots0}_{m-1\,\text{zero}}\,a_m\dots a_{m+r-1}\right)\end{aligned}$$

بشرط أن تكون الأعداد a_n محققة للشروط الثلاثة المذكورة في التعريف 3.

وبذلك نجد أنَّ عدد عشري دوري يمكن كتابته بدلالة مُتَسَلْسِلَة هَندَسيَّة مُتقارِبَة بالشكل الآتي:

$$0.\overline{a_1a_2\dots a_k}=0.a_1a_2\dots a_k\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^k}\right)^n.$$

وبشكل أكثر عموميَّة:

$$0.b_1b_2\dots b_m\overline{a_1a_2\dots a_k}=0.b_1b_2\dots b_m+(0.a_1a_2\dots a_k)(10^{-m})\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^k}\right)^n.$$

فعلى سبيل المثال:

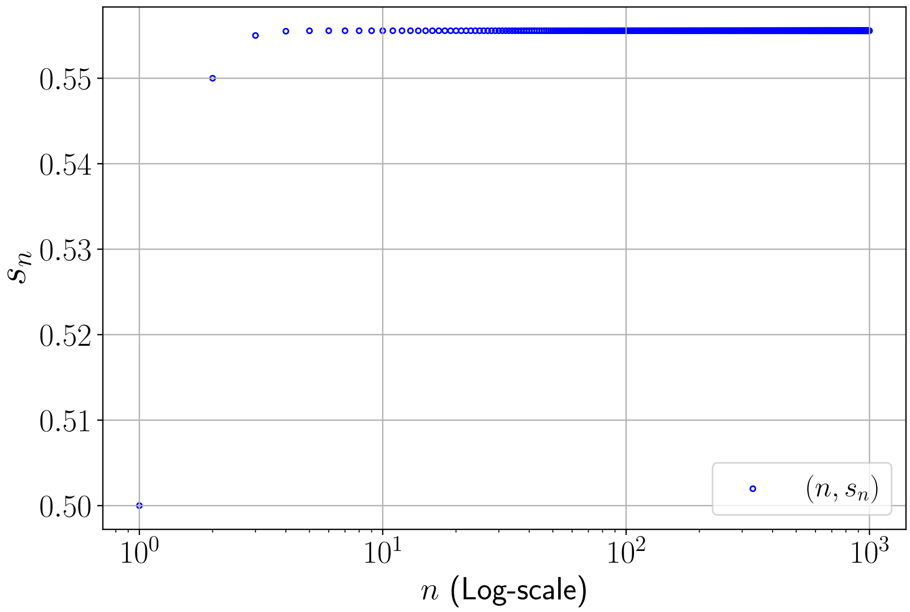
$$0.\overline{5} = 0.5\sum_{n=0}^{\infty}\left(10^{-1}\right)^n = \frac{5}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

$$0.\overline{54} = 0.54\sum_{n=0}^{\infty}\left(10^{-2}\right)^n = \frac{54}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n,$$

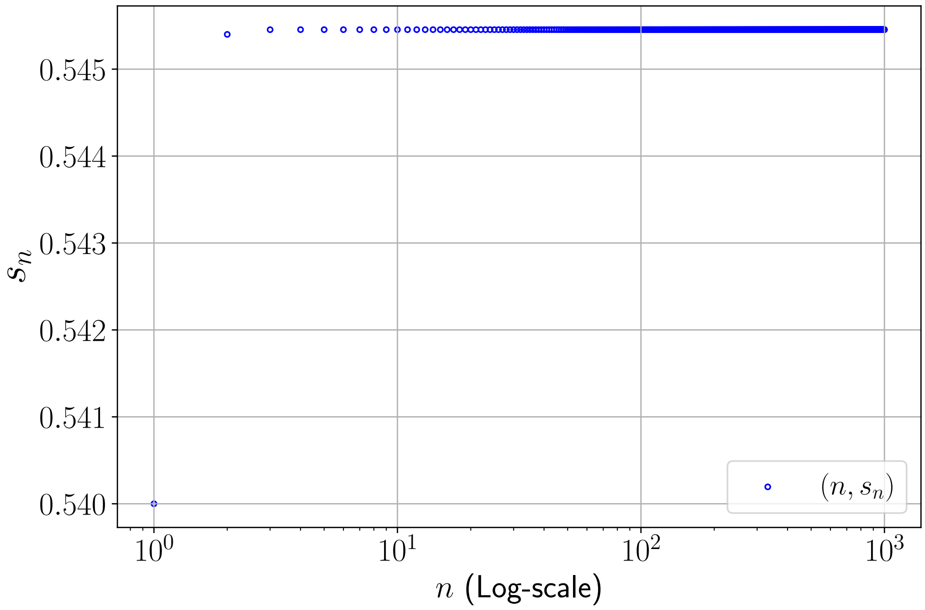
$$0.5\overline{4} = 0.5 + (0.4)(10^{-1})\sum_{n=0}^{\infty}(10^{-1})^n = \frac{5}{10} + \frac{4}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

$$0.503\overline{123} = 0.503 + (0.123)(10^{-3})\sum_{n=0}^{\infty}(10^{-3})^n = \frac{503}{1000} + \frac{123}{10^6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^3}\right)^n.$$

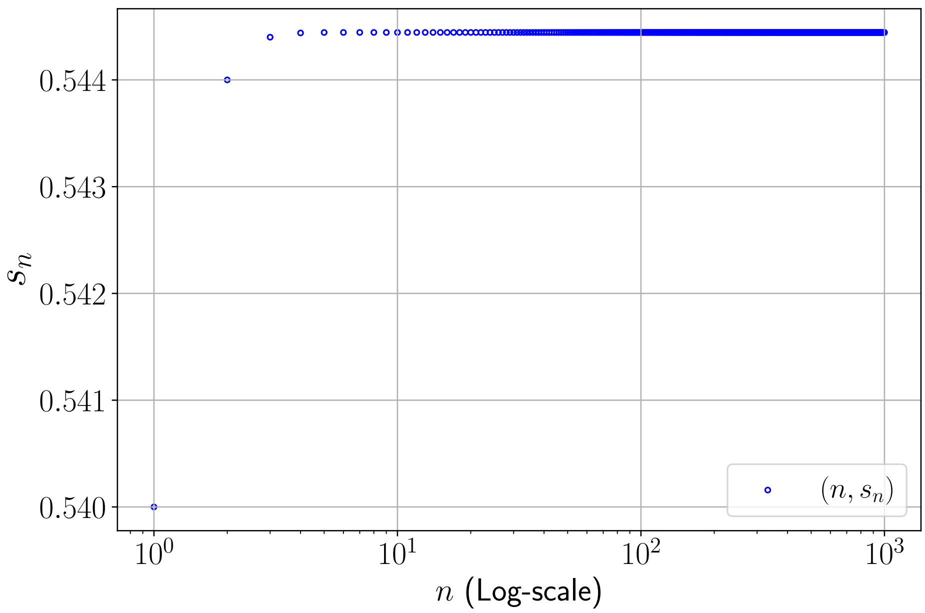
انظر الأشكال: 23.1، 24.1، 25.1 و 26.1.



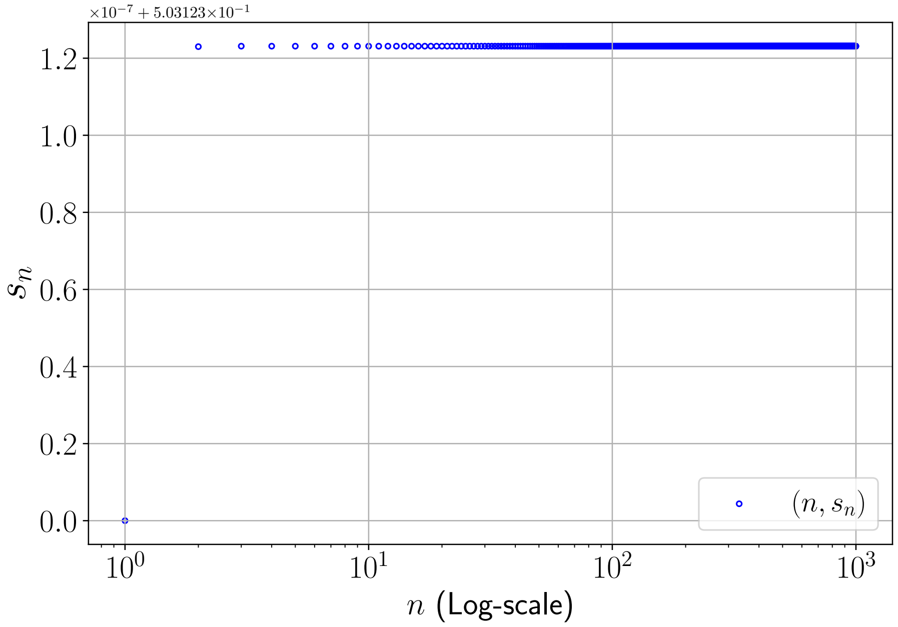
شكل 23.1: النقاط (n, s_n) حيث $0 \leqslant n \leqslant 1000$ و $s_n = \frac{5}{10}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{10}\right)^k$. في هذا الشكل لدينا: $s_{1000} \approx 0.5555555555555556$.



شكل 24.1: النقاط (n, s_n) حيث $0 \leqslant n \leqslant 1000$ و $s_n = \frac{54}{100}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{100}\right)^k$، في هذا الشكل لدينا: $s_{1000} \approx 0.5454545454545455$.



شكل 25.1: النقاط (n, s_n) حيث $0 \leqslant n \leqslant 1000$ و $s_n = \frac{5}{10} + \frac{4}{100}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{10}\right)^k$، في هذا الشكل لدينا: $s_{1000} \approx 0.5444444444444444$.



شكل 26.1: النقاط (n, s_n) حيث $0 \leqslant n \leqslant 1000$ و $s_n = \frac{503}{10^3} + \frac{123}{10^6}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{10^3}\right)^k$. في هذا الشكل لدينا: $s_{1000} \approx 0.5031231231231231$.

مثال 23:

$$3.12\overline{7} = 3.12 + \left(0.007 \times \frac{10}{9}\right), \quad 3.1\overline{27} = 3.1 + \left(0.027 \times \frac{100}{99}\right),$$

$$3.\overline{127} = 3 + \left(0.127 \times \frac{1000}{999}\right), \quad -53.1\overline{27} = -53 + 0.1 + \left(0.027 \times \frac{100}{99}\right).$$

ونلاحظ أنَّه يمكن كتابة العدد $3.\overline{127}$ بالشكل: $3.1\overline{271}$ أو $3.12\overline{712}$. لأن هذه الرموز الثلاثة تدل على ناتج مُتَسَلْسِلَةَ عشريَّة واحدة. وبحساب هذا الناتج نجد أنَّه يساوي: $3 + (0.127 \times \frac{1000}{999})$ أو $3.1 + (0.0271 \times \frac{1000}{999})$ أو $3.12 + (0.00712 \times \frac{1000}{999})$. ويمكن بسهولة التحقق من تساوي هذه الأعداد الثلاثة.

فيما سيأتي نذكر المبرهنة المعاكسة للمبرهنة 8.

مبرهنة 9:

إذا كان c عددًا عاديًا، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ العشريَّة المُتَقارِبَة من c تكون دوريَّة.

الإثبات: لنفرض أن $c = \frac{p}{q}$ حيث p و q عددين صحيحين، و $q \neq 0$. لإنشاء المُتَسَلْسِلَةَ العشريَّة المُتَقارِبَةَ

من c نقسم p على q فيكون حاصل القسمة a_0، ثم نضرب باقي القسمة بـ 10 ونقسم الجداء على q، فيكون حاصل القسمة هو a_1، ثم نضرب باقي هذه القسمة بـ 10 ونقسم الجداء على q، فيكون حاصل القسمة هو a_2، وهكذا ... ونلاحظ أنَّ هذه العملية لا تختلف عن عملية التقسيم الفعلي لـ p على q. عندما تنتهي أرقام المقسوم، نضع أمام حاصل القسمة فاصلة، وأمام الباقي صفراً، ثم نتابع التقسيم لإيجاد أرقام حاصل القسمة التي تلي الفاصلة. ولكن عملية التقسيم هنا لا تنتهي (حتى لو كان أحد البواقي معدومًا، فإنَّنا نتابع التقسيم، ولكن تكون الأرقام التالية في حاصل القسمة معدومة).

ملاحظة 15:

يمكننا مما سبق ذكره إيجاد تقابل بين المُتَسَلْسِلَات العشريَّة والأعداد الحَقيقِيَّة. فإذا رمزنا بـ $\mathbb{S}$ للمجموعة المؤلفة من جميع المُتَسَلْسِلَات العشريَّة، و بـ $\mathbb{A}$ للمجموعة المؤلفة من جميع الأعداد الحَقيقِيَّة، وإذا ربطنا بكل مُتَسَلْسِلَة عشريَّة (من $\mathbb{S}$) ناتجها المحدود (من $\mathbb{A}$)، فإنَّ الرَّابطة الناتجة (بين $\mathbb{S}$ و $\mathbb{A}$) تكون تقابلًا، لأن لكل مُتَسَلْسِلَة عشريَّة ناتجًا واحدًا، وبذلك تكون هذه الرابطة دالَّة، واختلاف المُتَسَلسِلَتَيْن العشريتين يؤدي إلى اختلاف ناتجيهما، وبذلك تكون هذه الدَّالَّة متباينة، وكل عدد حقيقي هو ناتج لمُتَسَلْسِلَة عشريَّة، وبذلك تكون هذه الدَّالَّة تقابلًا بين $\mathbb{S}$ و $\mathbb{A}$، وهو المطلوب. وبما أنَّ ناتج أي مُتَسَلْسِلَة عشريَّة هو عدد حقيقي، وكل عدد حقيقي هو ناتج لمُتَسَلْسِلَة عشريَّة، وبما أنَّنا رمزنا لناتج المُتَسَلْسِلَة العشريَّة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ بالرمز $a_0.a_1a_2\ldots$، إذن فكل رمز من هذا الشكل يمثل عددًا حقيقيًا، وكل عدد حقيقي يُمثّل برمز من هذا الشكل. أي أن مجموعة الرموز التي هي من هذا الشكل (حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots$ تحقق شروط التعريف 3) لا تختلف عن مجموعة الأعداد الحَقيقِيَّة (وبالإضافة إلى ذلك فإنَّ اختلاف أي رمزين منها يؤدي إلى اختلاف العددين اللذين يدلان عليهما). ونلاحظ أيضًا أنَّه إذا رمزنا بـ S_1 لمجموعة المُتَسَلْسِلَات العشريَّة الدَّوريَّة، وبـ A_1 لمجموعة الأعداد العادية، وإذا قصرنا التقابل المذكور قبل قليل على القاعدة الجديدة S_1 والمستقر الجديد A_1 فإنَّ الفرع الناتج يكون تقابلًا بين S_1 و A_1، أي بين مجموعة المُتَسَلْسِلَات العشريَّة ومجموعة الأعداد العادية.

7.1 العبارات المُقارِبَة $O, o, \sim$:

لتكن $a_n \geqslant 0$ و $b_n > 0$. عندئذ فإنَّنا نكتب:

- $a_n = O(b_n),\ n \longrightarrow \infty$ إذا وفقط إذا كان: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$، حيث $c > 0$.
- $a_n = o(b_n),\ n \longrightarrow \infty$ إذا وفقط إذا كان: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
- $a_n \sim b_n,\ n \longrightarrow \infty$ إذا وفقط إذا كان: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

ومنه حسب اختبار المقارنة الثاني نجد أنَّه إذا كانت $a_n \geqslant 0$ و $b_n > 0$ من أجل $n \geqslant n_0$، حيث $n_0 \in \mathbb{N}$، وكان

$$a_n \sim b_n,\ n \longrightarrow \infty.$$

فإنَّ المُتَسلسِلتَيْن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من نوع واحد (مُتقَارِبَتان معًا أو مُتبَاعِدَتَان معًا).

مثال 24:

من أجل المُتَسَلْسِلَة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^4}{3^n + \ln^2(n+1)}.$$

نلاحظ أنَّ:

$$e^n + n^4 \sim e^n;\ n \longrightarrow \infty, \qquad 3^n + \ln^2(n+1) \sim 3^n;\ n \longrightarrow \infty.$$

ومنه:

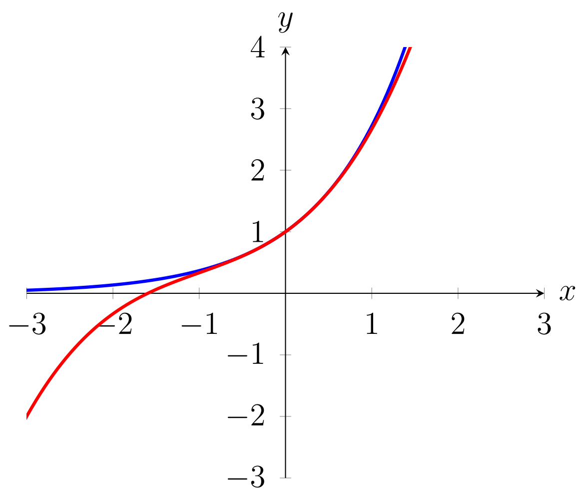
$$a_n := \frac{e^n + n^4}{3^n + \ln^2(n+1)} \sim \left(\frac{e}{3}\right)^n;\ n \longrightarrow \infty.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$ مُتقارِبَة (هَندَسيَّة أساسها $q = \frac{e}{3} < 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة أيضًا.

فيما سيأتي نعرض بعض العلاقات الهامة من أجل الدَّوال المُثلَّثيَّة، والمُثلَّثيَّة العكسيَّة، والزَّائدِيَّة، والزَّائِديَّة العكسيَّة، وهي عبارة عن متسلسلة تايلور (أو ماكلوران) لهذه الدَّوال في جوار الصفر، والتي ستفيد بشكل كبير في دراسة المُتَسَلْسِلات التي تحوي هذه الدَّوال في صيغة الحد العام لها.

(1)

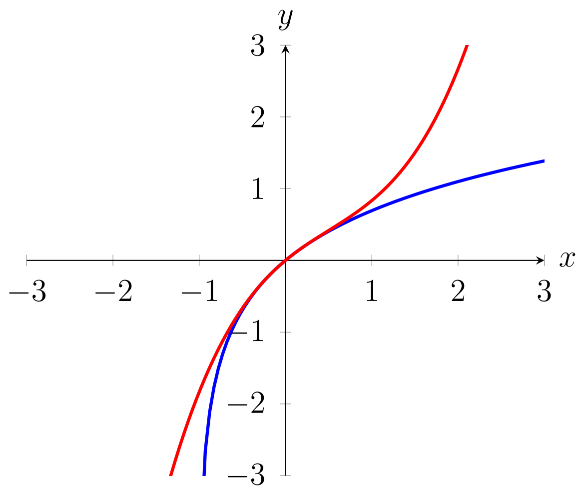
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 27.1: الخطَّان البَيانيَّان للدَّالَّتيْن: $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

(2)

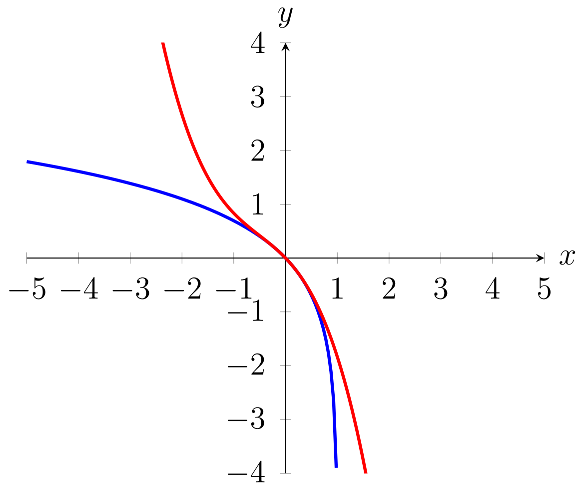
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 28.1: الخطَّان البَيانيَّان للدَّالَّتيْن: $f_1(x) = \ln(1+x),\ f_2(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

(3)

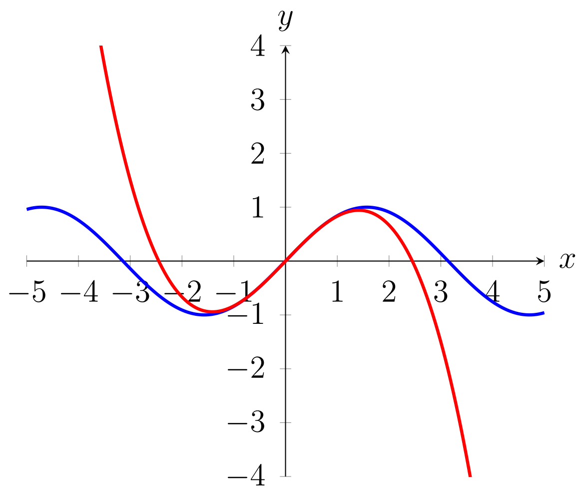
$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 29.1: الخطّان البيانيّان للدالّتين: $f_1(x) = \ln(1-x),\ f_2(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

(4)

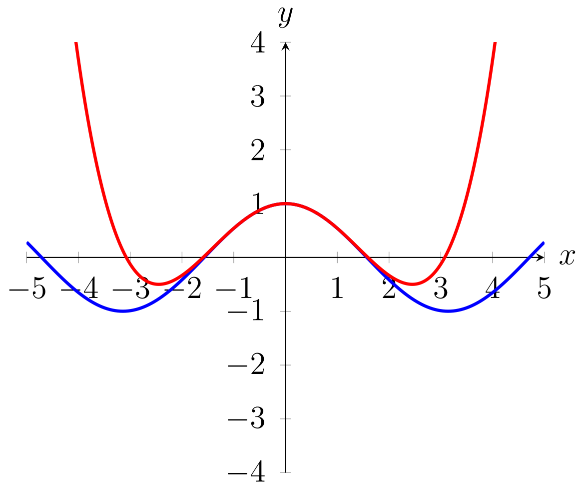
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 30.1: الخطّان البيانيّان للدالّتين: $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$.

(5)

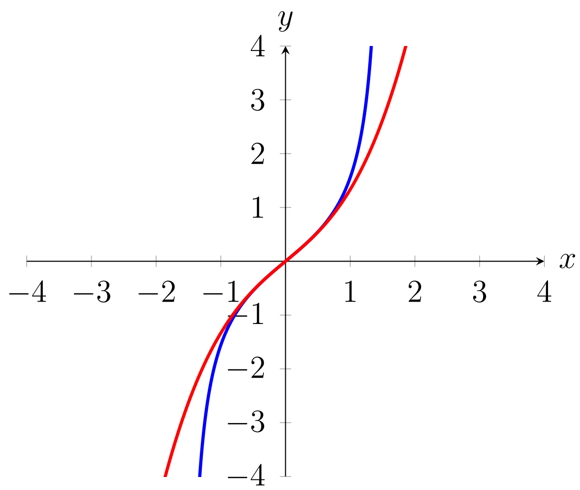
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 31،1: الخطّان البيانيّان للدّالّتين: $f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

(6)

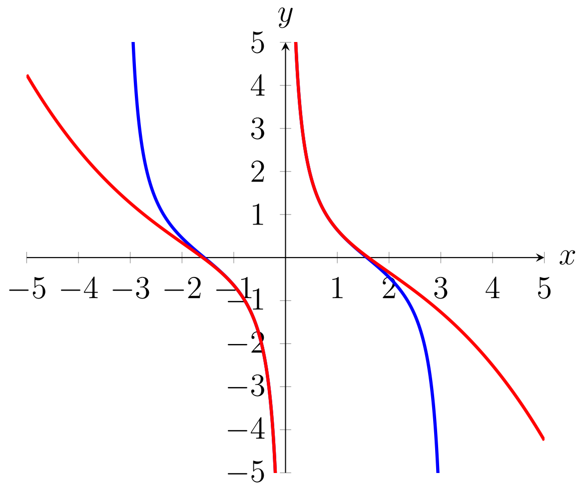
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 32،1: الخطّان البيانيّان للدّالّتين: $f_1(x) = \tan x,\ f_2(x) = x + \frac{x^3}{3}$.

(7)

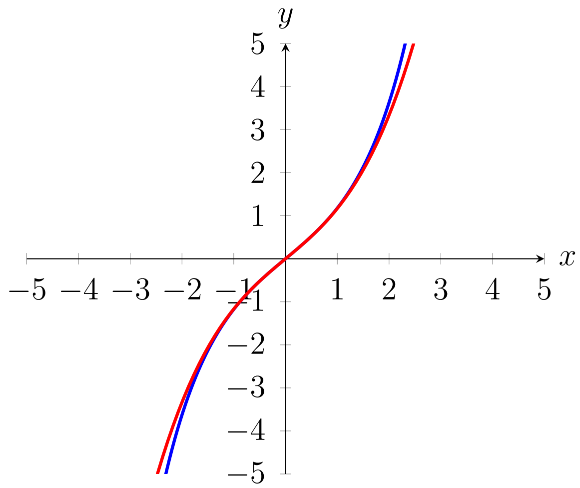
$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 33.1: الخَطّان البيانيّان للدالّتين: $f_1(x) = \cot x,\ f_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45}$.

(8)

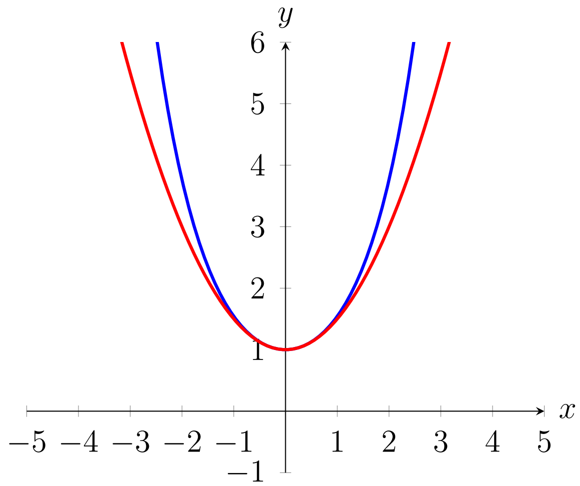
$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 34.1: الخَطّان البيانيّان للدالّتين: $f_1(x) = \sinh x,\ f_2(x) = x + \frac{x^3}{3!}$.

(9)

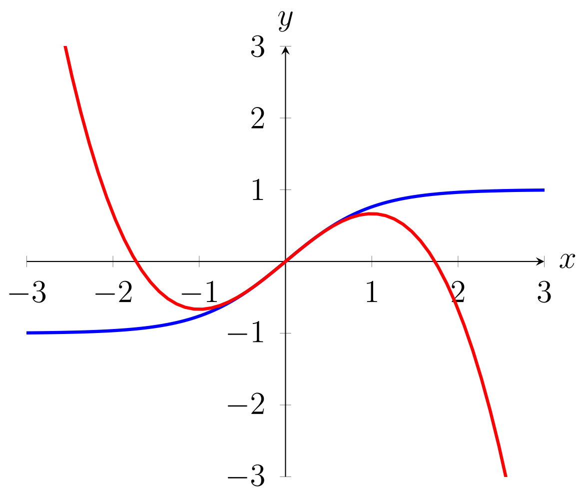
$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^2); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 35.1: الخطّان البيانيّان للدالّتين: $f_1(x) = \cosh x,\ f_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2!}$.

(10)

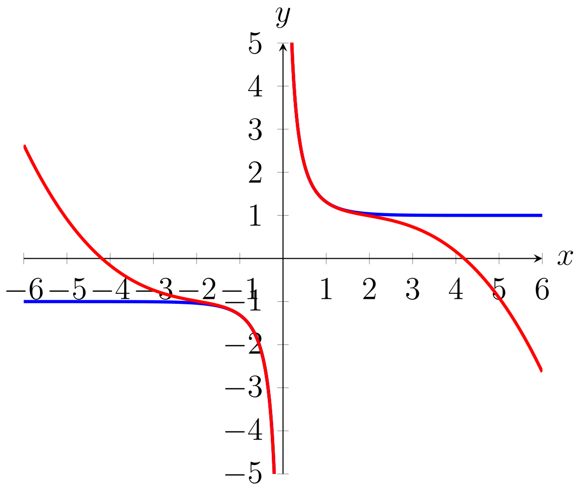
$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3); \qquad x \longrightarrow 0,$$



شكل 36.1: الخطّان البيانيّان للدالّتين: $f_1(x) = \tanh x,\ f_2(x) = x - \frac{x^3}{3}$.

(11)

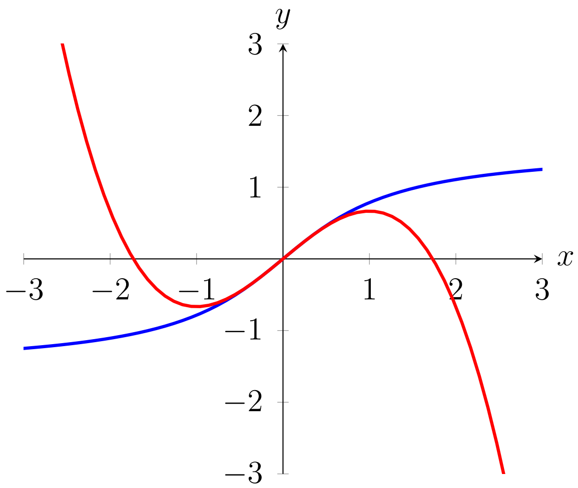
$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3); \qquad x \longrightarrow 0,$$



شكل 37.1: الخطّان البيانيّان للدالّتين: $f_1(x) = \coth x,\ f_2(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45}$.

(12)

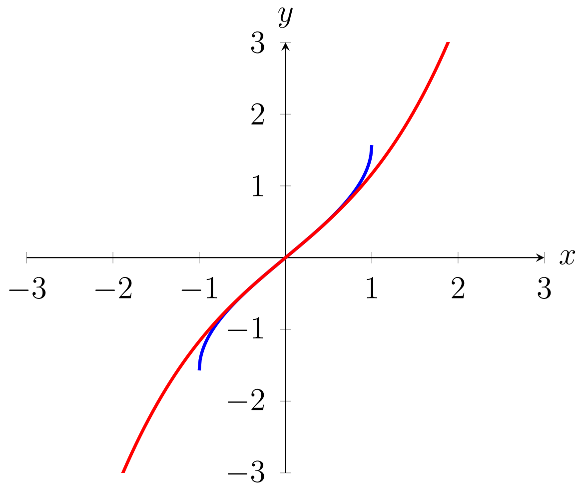
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 38.1: الخطّان البيانيّان للدالّتين: $f_1(x) = \arctan x,\ f_2(x) = x - \frac{x^3}{3}$.

(13)

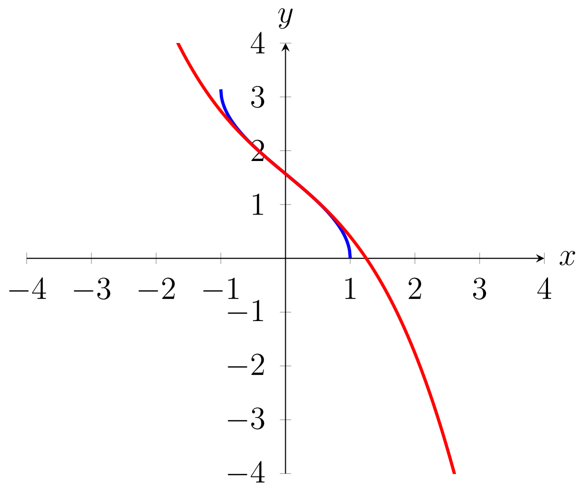
$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 39.1: الخطّان البَيانيّان للدّالّتيْن: $f_2(x) = x + \frac{x^3}{6}$، $f_1(x) = \arcsin x$.

(14)

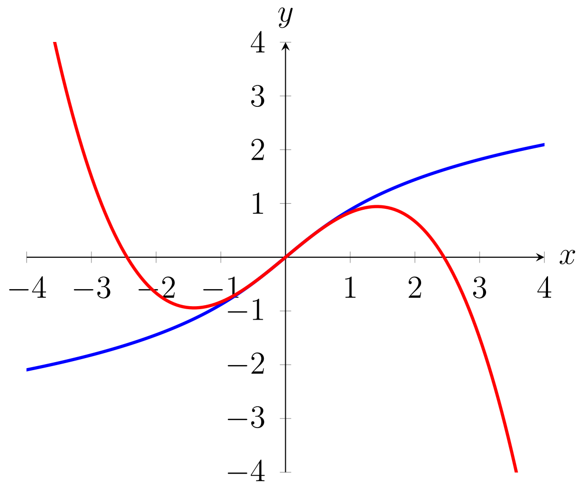
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 40.1: الخطّان البَيانيّان للدّالّتيْن: $f_2(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6}$، $f_1(x) = \arccos x$.

(15)

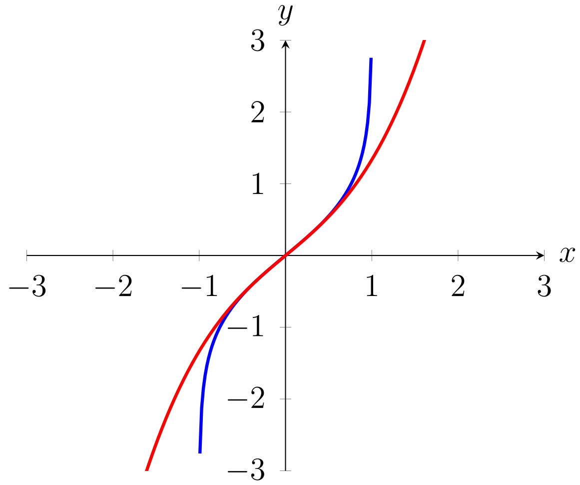
$$\operatorname{arcsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$



شكل 41.1: الخطّان البيانيّان للدالّتيْن: $f_1(x) = \operatorname{arcsinh} x,\ f_2(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

(16)

$$\operatorname{arctanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3); \qquad x \longrightarrow 0,$$



شكل 42.1: الخطّان البيانيّان للدالّتيْن: $f_1(x) = \operatorname{arctanh} x,\ f_2(x) = x + \frac{x^3}{3}$.

(17)

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_k^n x^k; \qquad \mathrm{C}_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

(18)

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathrm{C}_k^n x^k; \qquad \mathrm{C}_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

مثال 25:

من أجل المُتَسَلْسِلَة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right).$$

لدينا:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3); \quad x \longrightarrow 0,$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\ln(1+\tan x) &= \tan x - \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{\tan^3 x}{3} + o(x^3) \\
&= x + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3 + o(x^3) \\
&= x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

وبالمثل نجد:

$$\ln(1+\arctan x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \quad x \longrightarrow 0.$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\arctan x}\right) &= \ln(1+\tan x) - \ln(1+\arctan x) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^3), \quad x \longrightarrow 0. \\
&= \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$a_n := \ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right); \quad n \longrightarrow \infty$$

ومنه:

$$a_n \sim \frac{2}{3n^{3/2}}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^{3/2}}$ مُتَقارِبَة (مُتَسَلْسِلَة ريمان) فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المَدروسَة مُتَقارِبَة أيضًا.

كما أنه من أجل الدَّوال الزَّائِدِيَّة، نعلم أنَّ:

$$\cosh x = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}.$$

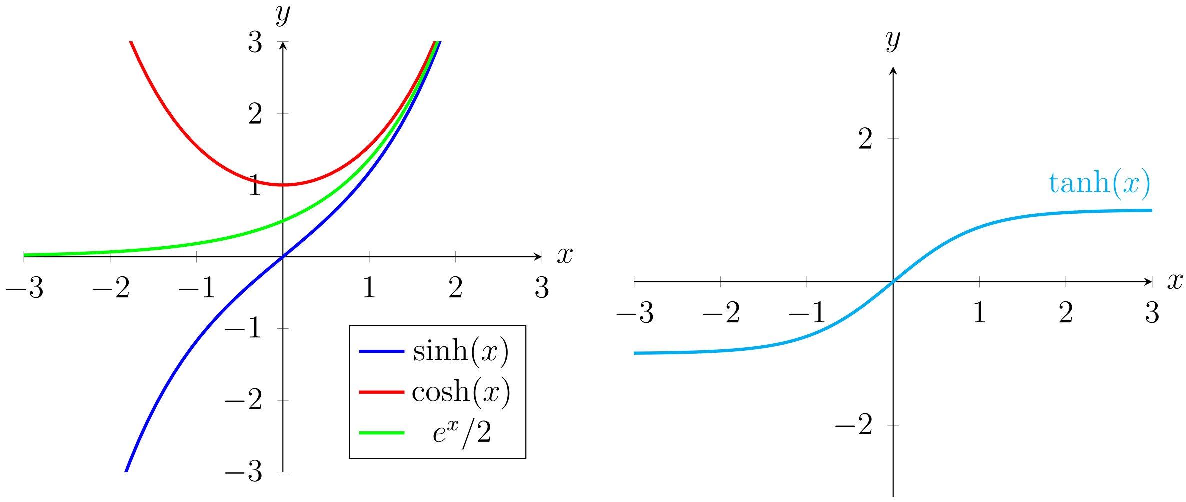
ومنه نلاحظ أنَّه عند تزايد قيم x بشكل كبير فإنَّ $\cosh x$ ستصبح تقريبًا مساوية لـ $\frac{e^x}{2}$، إذ إنَّ $\frac{e^{-x}}{2}$ سيصبح صغير كفاية بالقدر الذي يمكن إهماله، ونكتب (من أجل قيم كبيرة لـ x)

$$\cosh x \approx \frac{e^x}{2}.$$

وبالمثل نلاحظ أيضًا أنَّ (من أجل قيم كبيرة لـ x)

$$\sinh x \approx \frac{e^x}{2}.$$

كما أنَّ (من أجل قيم كبيرة لـ x): $\tanh x \approx 1$، انظر الشكل 43.1.



شكل 43.1: الخطوط البيانيَّة للدَّوال الزَّائِدِيَّة.

مثال 26:

من أجل المُتَسَلْسِلَة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot \cosh^3(n)}.$$

نلاحظ أنَّه من أجل $\cosh(n)$، يوجد عدد طبيعي m كبير كفاية، بحيث يكون:

$$\cosh(n) \approx \frac{e^n}{2}, \qquad \forall n \geqslant m.$$

ومنه:

$$\frac{7^n \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot \cosh^3(n)} \approx \frac{8 \cdot 7^n \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot e^{3n}}, \quad \forall n \geqslant m.$$

لندرس طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{8\cdot 7^n \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot e^{3n}}$. لنضع: $a_n = \frac{8\cdot 7^n\cdot(2n)!}{(n!)^2\cdot e^{3n}}$، ومنه نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{14(2n+1)}{e^3(n+1)} = \frac{28}{e^3} > 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ مُتَباعِدَة حسب اختبار دَالامْبِير. وبما أنَّ حذف عدد منته من حدود مُتَسَلْسِلَة لا يؤثر على طبيعتها فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة.

الفصل 2

تمارين غير محلولة (المجموعة الأولى)

في هذا الفصل سنعرض المجموعة الأولى من التمارين دون ذِكر لحلها، تشمل كافة الأفكار النظرية التي تَمَّ ذكرها في الأقسام الثلاثة الأولى في الفصل الأول. إذ سيتم عرض حل البعض منها بشكل تفصيلي، وحل مقتضب للباقي منها، في الفصل الرابع.

أولًا: جد مجموع كل من المُتَسَلْسِلَات المُتَقَارِبَة الآتية

التمرين 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

التمرين 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

التمرين 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}.$$

التمرين 4

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{4\times 9}+\frac{7}{9\times 16}+\frac{9}{16\times 25}+\dots$$

التمرين 5

$$\frac{1}{(e+1)(e+2)}+\frac{1}{(e+2)(e+3)}+\dots$$

التمرين 6

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n-1}}-a^{\frac{1}{2n+1}}\right);\qquad a\neq 0.$$

التمرين 7

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right).$$

التمرين 8

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

التمرين 9

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-3)^n}{5^n}.$$

التمرين 10

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}.$$

التمرين 11

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{e^n}}.$$

التمرين 12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}.$$

التمرين 13

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right).$$

التمرين 14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right).$$

التمرين 15

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

التمرين 16

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)\right).$$

التمرين 17

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right).$$

ملاحظة 16:

يمكن التعبير عن العدد النيبري e، بأحد الأشكال الآتية:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{(n-p)!}.$$

تفيد هذه الملاحظة في حساب مجموع نمط معيَّن من المُتَسَلْسِلَات المُتَقَارِبَة ذي صلة بالعدد e.

التمرين 18

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}.$$

التمرين 19

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!}.$$

التمرين 20

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

التمرين 21

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n-1)!}.$$

التمرين 22

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{n!}.$$

التمرين 23

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)!}.$$

التمرين 24

$$\frac{1}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \frac{3^2}{4!} + \dots$$

التمرين 25

$$1 + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \dots$$

ثانيًا: ادرس تَقارُب أو تَباعُد كل من المُتَسَلْسِلَات الآتية

التمرين 26

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-n\right).$$

التمرين 27

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}.$$

التمرين 28

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{1}{n}\right).$$

التمرين 29

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}.$$

التمرين 30

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos^{2}\frac{1}{n}.$$

التمرين 31

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt{\sin\frac{1}{n^{2}}}.$$

التمرين 32

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n}$$

التمرين 33

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\frac{25}{51}+\dots$$

التمرين 34

$$\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\dots$$

التمرين 35

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^4 n}.$$

التمرين 36

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}.$$

التمرين 37

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}.$$

التمرين 38

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{2^{\ln(\ln(n))}}{n\ln(n)}.$$

التمرين 39

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\arctan(n)}}{n^2+1}.$$

التمرين 40

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}.$$

التمرين 41

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)+\sqrt{\ln^3(n)}}.$$

التمرين 42

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}.$$

التمرين 43

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}.$$

التمرين 44

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))}.$$

التمرين 45

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}.$$

التمرين 46

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

التمرين 47

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}.$$

التمرين 48

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^{2n-1}}.$$

التمرين 49

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n+3^n}.$$

التمرين 50

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5}{4^n+n^8}.$$

التمرين 51

$$\sum_{n=2021}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}.$$

التمرين 52

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln(n)}.$$

التمرين 53

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

التمرين 54

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(e^n-1)}.$$

التمرين 55

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{7}{4} + \dots$$

التمرين 56

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt[3]{n}}.$$

التمرين 57

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \dots$$

التمرين 58

$$\frac{3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{5}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{7}{4^2 \cdot 5^2} + \dots$$

التمرين 59

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

التمرين 60

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

التمرين 61

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right).$$

التمرين 62

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right).$$

التمرين 63

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}.$$

التمرين 64

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$$

التمرين 65

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-\ln n}{10n^3+n^2}}.$$

التمرين 66

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}.$$

التمرين 67

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2.$$

التمرين 68

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right).$$

التمرين 69

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}\right).$$

التمرين 70

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n+1}.$$

التمرين 71

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

التمرين 72

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2^n+1}}.$$

التمرين 73

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

التمرين 74

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

التمرين 75

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right).$$

التمرين 76

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}.$$

التمرين 77

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n-2}{3^n+4n-2}.$$

التمرين 78

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}.$$

التمرين 79

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}.$$

التمرين 80

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n+n^2}.$$

التمرين 81

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}.$$

التمرين 82

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

التمرين 83

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}.$$

التمرين 84

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{4!} + \frac{(3!)^2}{6!} + \dots$$

التمرين 85

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}.$$

التمرين 86

$$2 + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 5} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9} + \dots$$

التمرين 87

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \dots$$

التمرين 88

$$a + \frac{a(a+2)}{4} + \frac{a(a+2)(a+4)}{4\cdot 7} + \dots \qquad \forall a > 0.$$

التمرين 89

$$1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{6}{4^4} + \dots$$

التمرين 90

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2}}.$$

التمرين 91

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}.$$

التمرين 92

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}.$$

التمرين 93

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+2}}{4^n}.$$

التمرين 94

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1}}{3^{n^2} \cdot \sqrt{n}}.$$

التمرين 95

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

التمرين 96

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \dots$$

التمرين 97

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} + \frac{5}{7} + \left(\frac{7}{10}\right)^{3/2} + \dots$$

التمرين 98

$$\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\dots$$

التمرين 99

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{5}{3^n}\right).$$

التمرين 100

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{10n}}.$$

التمرين 101

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot n!}.$$

التمرين 102

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\right)^2+\dots$$

التمرين 103

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}\cdot((n-1)!)^2}{((2n-1)!!)^2}.$$

التمرين 104

ادرس، حسب قيم $a>0$، تقارُب أو تبَاعُد المُتَسَلْسِلَة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}.$$

التمرين 105

ادرس، حسب قيم $a>0, b>0$، نوع المُتَسَلْسِلَة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}.$$

التمرين 106

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}.$$

التمرين 107

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^n}{(2n+1)^n}.$$

التمرين 108

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-2}}.$$

التمرين 109

$$\frac{1}{2\cdot 2!} - \frac{1}{4\cdot 4!} + \frac{1}{6\cdot 6!} - \frac{1}{8\cdot 8!} + \dots$$

التمرين 110

$$\frac{1}{10} - \frac{2}{3\cdot 10^3} + \frac{2^2}{2!\cdot 5\cdot 10^5} - \frac{2^3}{3!\cdot 7\cdot 10^7} + \dots$$

الفصل 3

تمارين غير محلولة (المجموعة الثانية)

في هذا الفصل سنعرض المجموعة الثانية من التمارين دون ذِكر لحلها، تشمل العديد من الأفكار النظرية التي تَمَّ ذكرها في الفصل الأول. إذ سيتم، في الفصل الخامس، عرض الحل لهذه المجموعة من التمارين بشكل مقتضب تلافياً للتفصيلات التي يجب على القارئ الدراية بها بشكل جيد.

ادرس تَقارُب أو تَباعُد كل من المُتَسَلْسِلَات الآتية.

التمرين 111

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{n}}.$$

التمرين 112

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

التمرين 113

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin^2(2n)}{\sqrt{n^5+3}}.$$

التمرين 114

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3(3-2\sin(n\pi/3))}.$$

التمرين 115

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\sqrt{n+2}\right)}{n\ln^2(n+1)}.$$

التمرين 116

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(3+2(-1)^n)}{\sqrt{n}} \cdot \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

التمرين 117

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{n+1}{2n}\right)}{\sqrt[4]{3n^4+2}}.$$

التمرين 118

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}} - 1.$$

التمرين 119

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} \ln\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right).$$

التمرين 120

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right).$$

التمرين 121

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cos\left(\frac{1}{n!}\right).$$

التمرين 122

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/n} \frac{x\sin^5 x}{1+x^2}dx.$$

التمرين 123

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}dx.$$

التمرين 124

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan((-n)^n)}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}.$$

التمرين 125

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{2^n}.$$

التمرين 126

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin\left(\frac{\pi}{4n}\right).$$

التمرين 127

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \arctan\left(\frac{n+1}{n^3+2}\right).$$

التمرين 128

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

التمرين 129

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right).$$

التمرين 130

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sin(1/n)}-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cos(n\pi).$$

التمرين 131

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

التمرين 132

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}}.$$

التمرين 133

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(3n)}{n\ln(n+1)\ln^2(n+2)}.$$

التمرين 134

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}}.$$

التمرين 135

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+4}}{n!\cdot 10^{\frac{n}{2}}}\arctan(1+n^2).$$

التمرين 136

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi^n\cdot n!}.$$

التمرين 137

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!\cdot\sin\left(7^{-n}\right)}{n!\cdot(2n)!}.$$

التمرين 138

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \arctan(n)}{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot n!}.$$

التمرين 139

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n \cdot (n!)^2 \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}.$$

التمرين 140

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n!)^3 \cdot \sinh^2(n)}{(3n)!}.$$

التمرين 141

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot \sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{(2n)^{3n}}.$$

التمرين 142

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n}{3}} \sqrt[3]{n!+1}.$$

التمرين 143

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \arctan\left(\frac{2^n}{n^n}\right).$$

التمرين 144

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\sqrt{(2n)! \cdot \cosh n}}.$$

التمرين 145

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdots (3n+1)^2}{(2n)!} \cdot \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

التمرين 146

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n)!\cdot\left(\arctan\left(\frac{1}{3^n}\right)\right)^n.$$

التمرين 147

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)^{n^2+n+5}.$$

التمرين 148

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{3^n}\right)\cdot\ln^n(n).$$

التمرين 149

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^n\cdot\log_4^n\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

التمرين 150

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[3n\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)+n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3}.$$

التمرين 151

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3}.$$

التمرين 152

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+\frac{n}{3}}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n^3}.$$

التمرين 153

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}\right).$$

التمرين 154

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}.$$

التمرين 155

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^5}.$$

التمرين 156

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n^2}{2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n^2}.$$

التمرين 157

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n\sqrt{n^2+n}}.$$

التمرين 158

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\sqrt{n}} \sin n.$$

التمرين 159

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\cdots(a+\sqrt{n+1})}; \qquad a > 0.$$

التمرين 160

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

التمرين 161

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

التمرين 162

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}.$$

التمرين 163

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2(n+1)}{n\sqrt{n+1}}.$$

التمرين 164

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}.$$

التمرين 165

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

الفصل 4

حل تمارين المجموعة الأولى

في هذا الفصل سيتمُّ عرض حل مُفَصَّل في بعض الأحيان، ومختصر في أحيان أُخْرَى، للتمارين التي تَمَّ ذكرها الفصل الثاني.

التمرين 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

الحل: الحد العام: $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$، للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، يمكن كتابته بالشكل:

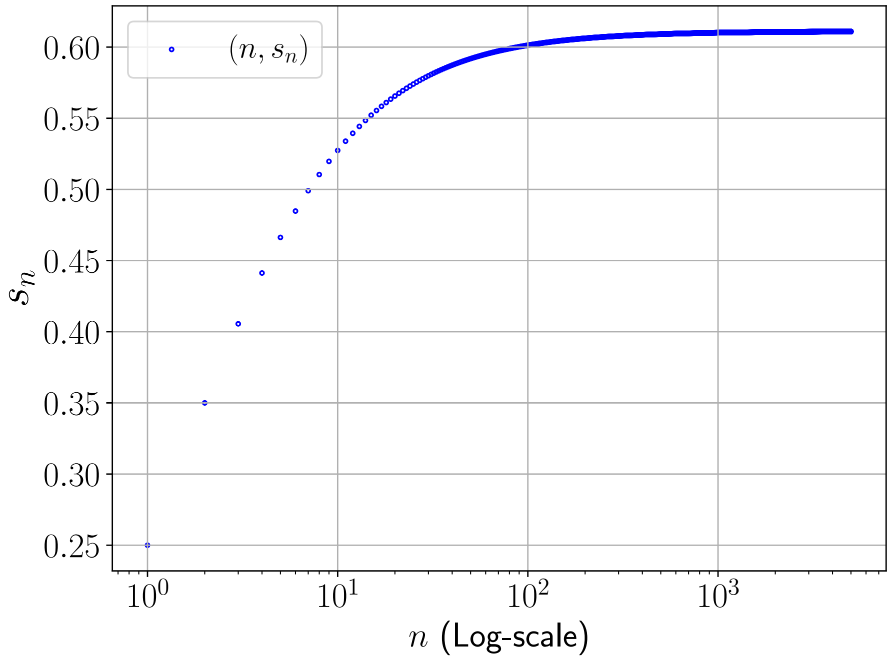
$$a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right).$$

ومنه لأجل الحد العام s_n، لمُتَتَالِيَة المَجَامِيْع الجُزْئِيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، يكون:

$$\begin{aligned}3s_n &= \left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\\ &\quad+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.\end{aligned}$$

ومنه: $\lim_{n\to\infty} 3s_n = \frac{11}{6}$. وبالتّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ مُتَقَارِبَة، ومجموعها يساوي $\frac{11}{18}$ (انظر الشكل 1.4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{11}{18} \approx 0.6111.$$



شكل 1.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{5000} \approx 0.610911191$.

التمرين 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

الحل: الحد العام: $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$، للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، يمكن كتابته بالشكل:

$$a_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+5}\right).$$

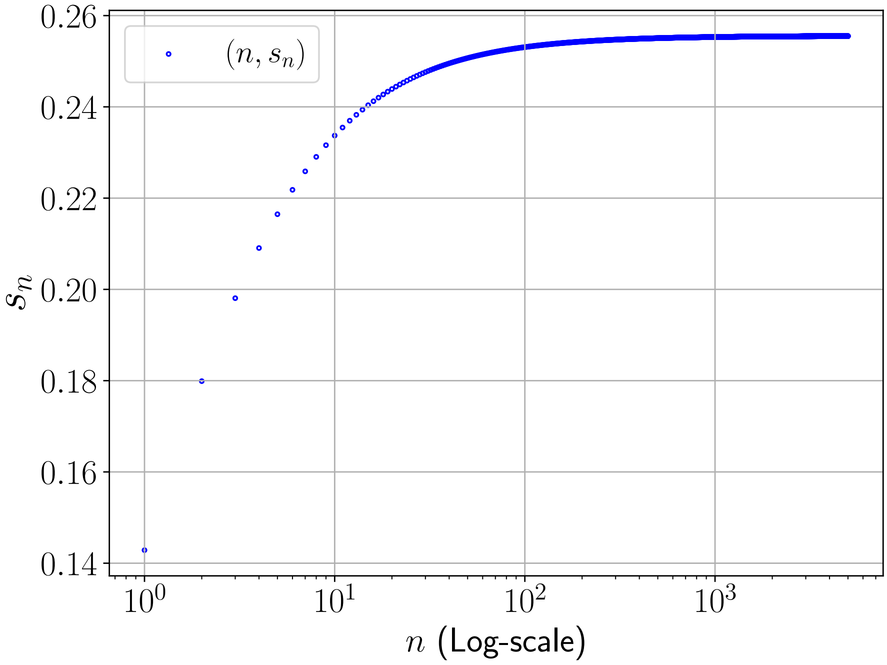
ومنه لأجل الحد العام s_n، لمُتَالِيَة المَجاميْع الجُزئيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، يكون:

$$\begin{aligned}6s_n &= \left(1-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{15}\right)+\ldots+\\&\quad+\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)\\&=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}.\end{aligned}$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to\infty} 6s_n = \frac{23}{15}$، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $\frac{23}{90}$

(انظر الشكل 2.4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{23}{90} \approx 0.2555.$$



شكل 2.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 5000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+5)}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{5000} \approx 0.2555$.

التمرين 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}.$$

الحل: الحد العام: $a_n = \frac{1}{(n+1)^2-1}$، للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، يمكن كتابته بالشكل:

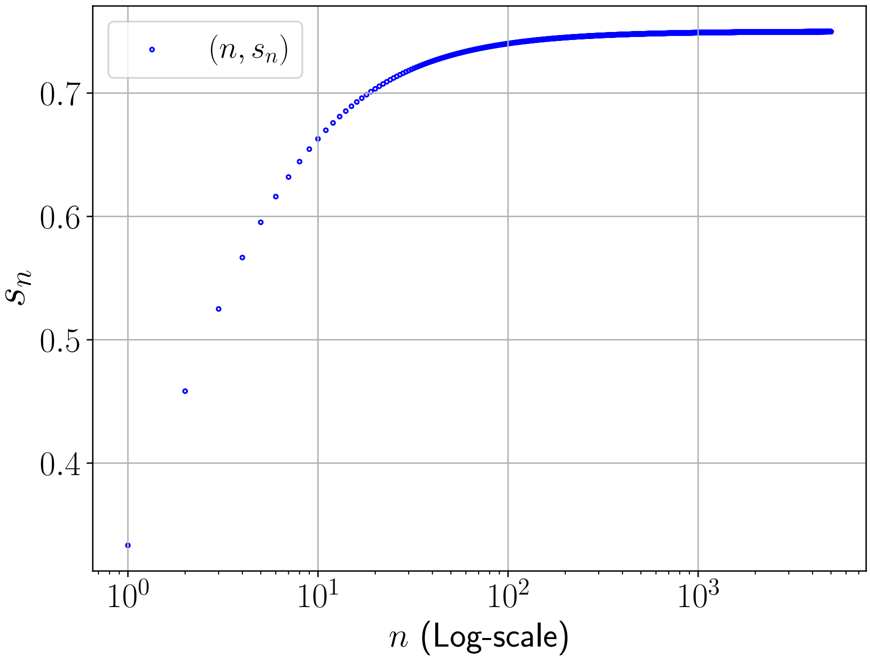
$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

ومنه لأجل الحد العام s_n، لمُتَالِيَة المَجَامِيعْ الجُزئِيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، يكون:

$$\begin{aligned} 2s_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

ومنه: $\lim_{n\to\infty} 2s_n = \frac{3}{2}$، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}$ مُتَقَارِبَة، ومجموعها يساوي $\frac{3}{4}$ (انظر الشكل 3.4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{3}{4} \approx 0.75.$$



شكل 3.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2-1}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{5000} \approx 0.7498$.

التمرين 4

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4\cdot 9} + \frac{7}{9\cdot 16} + \frac{9}{16\cdot 25} + \ldots$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

والحد العام: $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$، يمكن كتابته بالشكل:

$$a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

بوضع: $b_n = \frac{1}{n^2}$، نجد أنَّ:

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة تِلسكُوبِيَّة. كما أنَّ:

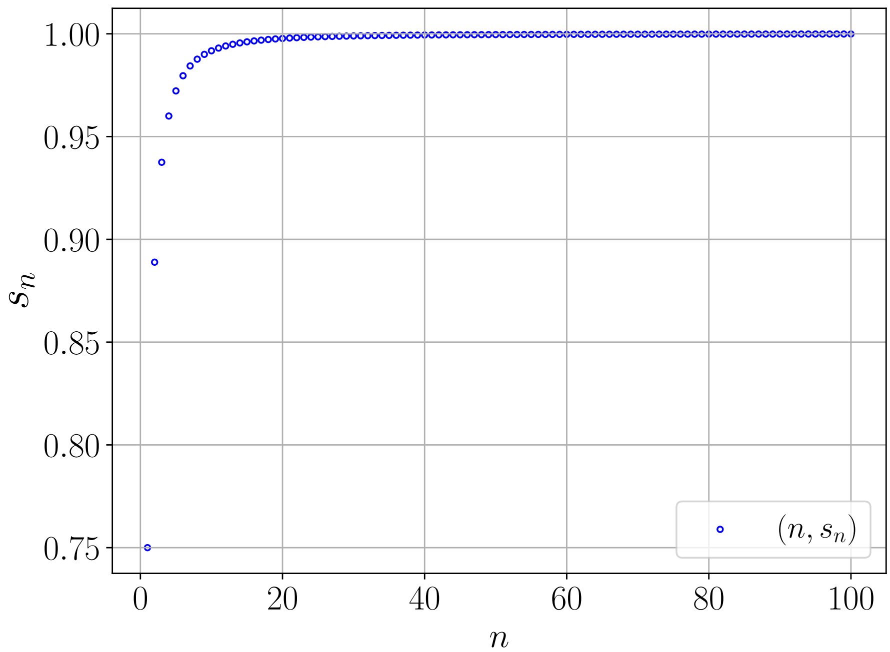
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبة، ومجموعها:

$$s = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

(انظر الشكل 4.4). أي:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4\cdot 9} + \frac{7}{9\cdot 16} + \frac{9}{16\cdot 25} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$



شكل 4.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 0.9999$.

التمرين 5

$$\frac{1}{(e+1)(e+2)} + \frac{1}{(e+2)(e+3)} + \ldots$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(e+n)(e+n+1)}.$$

والحد العام: $a_n = \frac{1}{(e+n)(e+n+1)}$، يمكن كتابته بالشكل:

$$a_n = \frac{1}{n+e} - \frac{1}{n+e+1}.$$

بوضع: $b_n = \frac{1}{n+e}$، نجد أنَّ:

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة تِلسْكُوبِيَّة. كما أنَّ:

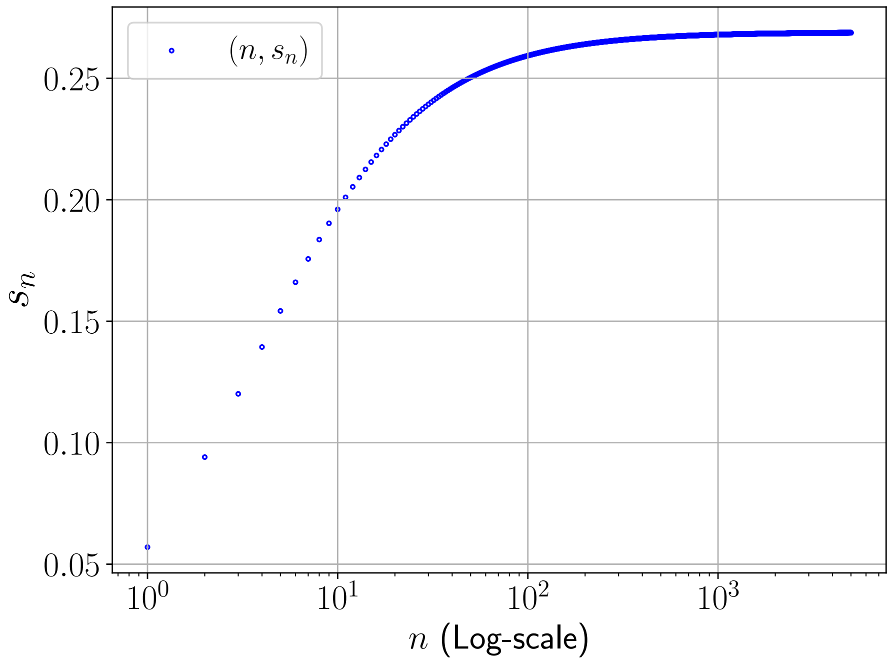
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+e} = 0.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقَارِبَة، ومجموعها:

$$s = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e+1} \approx 0.2689.$$

(انظر الشكل 5.4). أي:

$$\frac{1}{(e+1)(e+2)} + \frac{1}{(e+2)(e+3)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(e+n)(e+n+1)} = \frac{1}{e+1}.$$



شكل 5.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(e+k)(e+k+1)}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{5000} \approx 0.268741$.

التمرين 6

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n-1}}-a^{\frac{1}{2n+1}}\right); \quad a\neq 0.$$

الحل: لدينا: $a_n=a^{\frac{1}{2n-1}}-a^{\frac{1}{2n+1}}$، بوضع: $b_n=a^{\frac{1}{2n-1}}$، نجد أنَّ:

$$a_n=b_n-b_{n+1}, \qquad \forall n\geqslant 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة تِلسْكُوبِيَّة. كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{2n-1}}=1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المعطَاة مُتقَارِبة، ومجموعها:

$$s=b_1-\lim_{n\to\infty} b_n=a-1.$$

أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n-1}}-a^{\frac{1}{2n+1}}\right)=a-1; \quad a\neq 0.$$

التمرين 7

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2^{n+1}}\right).$$

الحل: نعلم أنَّه مهما يكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$، فإنَّ:

$$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)=\frac{1}{2}\left(\sin(\beta+\alpha)-\sin(\beta-\alpha)\right).$$

ومنه بوضع: $\alpha=\frac{1}{2^{n+1}}$ و $\beta=\frac{3}{2^{n+1}}$، نجد:

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{4}{2^{n+1}}\right)-\sin\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\sin\left(\frac{1}{2^{n}}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2^{n}}\right). \end{aligned}$$

ومنه بوضع: $b_n=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$، نجد أنَّ:

$$a_n=b_n-b_{n+1}, \qquad \forall n\geqslant 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة تِلسْكُوبِيَّة. كما أنَّ:

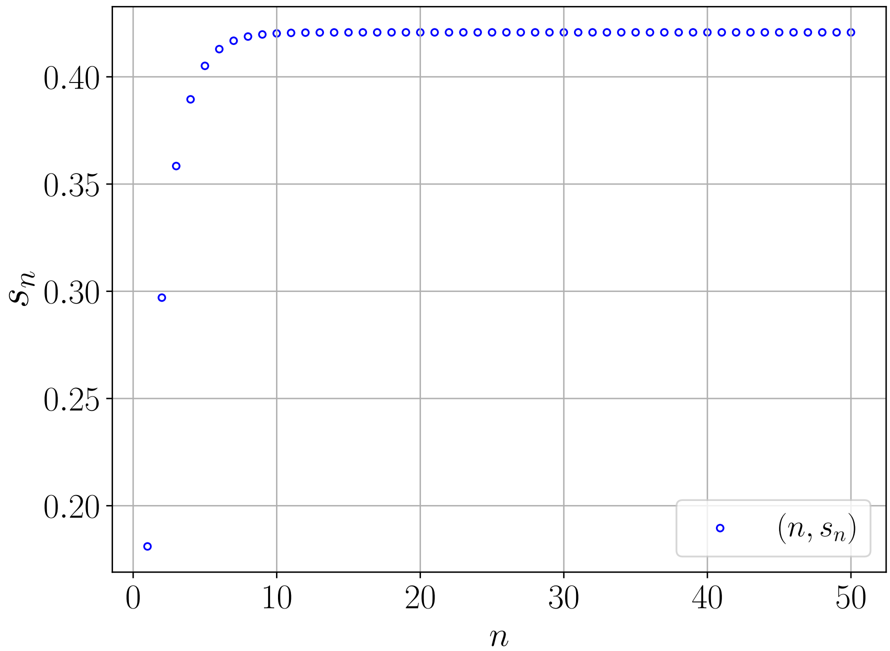
$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=0.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقارِبَة، ومجموعها:

$$s = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}\sin(1) \approx 0.4207.$$

(انظر الشكل 6،4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\sin(1) \approx 0.4207.$$



شكل 6،4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 50\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2^{k+1}}\right)$، في هذا الشكل لدينا: $s_{50} \approx 0.4207354924$.

التمرين 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

الحل: إنَّ:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+1)-1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} - \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} - \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\right) \end{aligned}$$

ومنه بوضع: $b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$، نجد أنَّ:

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة تِلسْكُوبِيَّة. كما أنَّ:

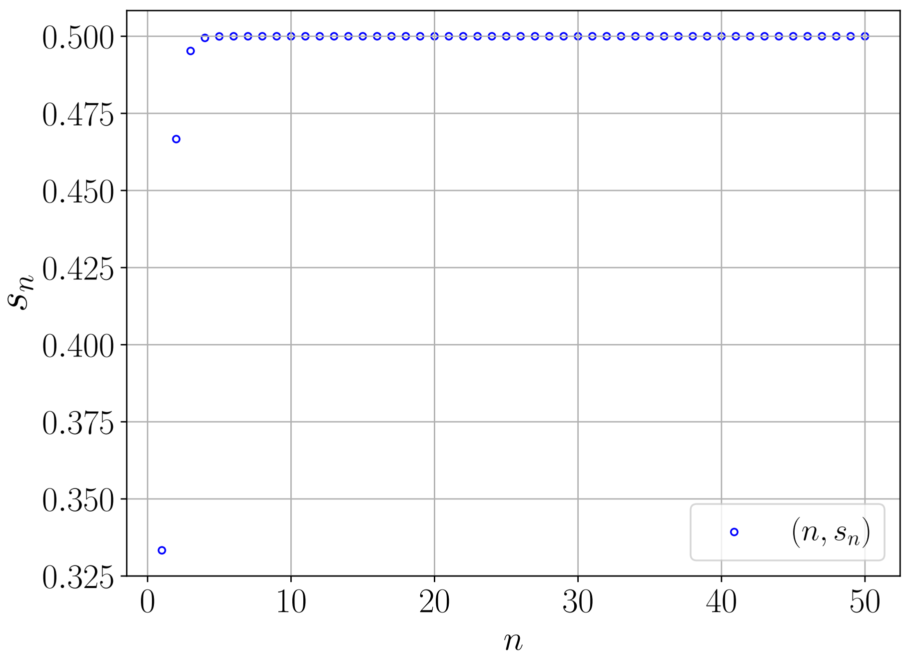
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)} = 0.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها:

$$s = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}.$$

(انظر الشكل 7.4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$



شكل 7.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1,2,\ldots,50\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{50} \approx 0.4999$. لاحظ سرعة تقارب مُتتالِيَة المَجاميع الجُزئِيَّة للنهاية 0.5 (بدءًا من الحد الخامس) والذي يُمثِّل مجموع المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة.

ملاحظة 17:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، إيجاد مجموع كل من المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+c)(n+c+2)};\quad (n+c)(n+c+2)\neq 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+c-1)(n+c)(n+c+1)};\quad (n+c-1)(n+c)(n+c+1)\neq 0.$$

التمرين 9

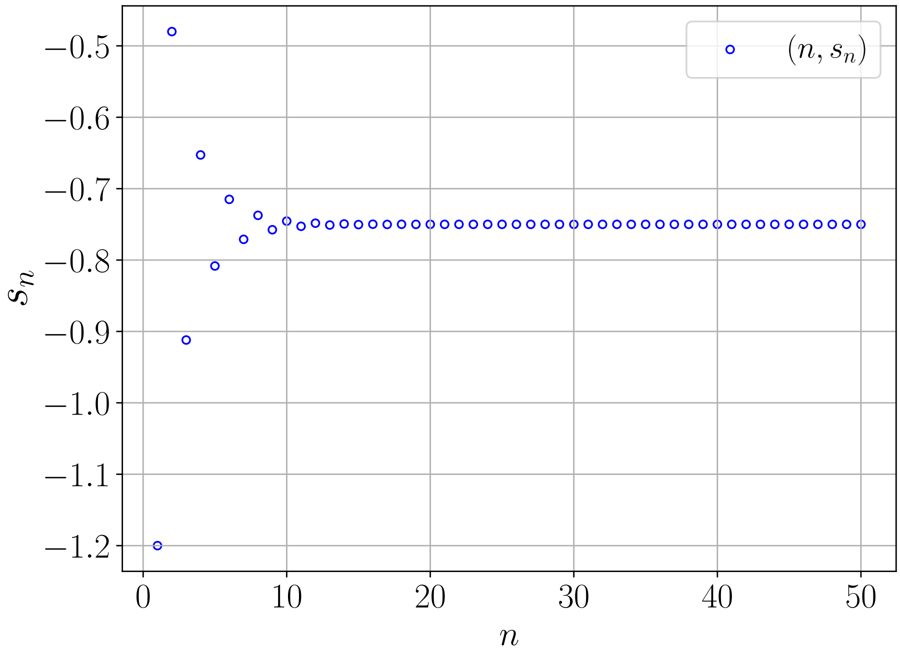
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-3)^n}{5^n}.$$

الحل: نلاحظ أنَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-3)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{-3}{5}\right)^n.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة هَندسِيَّة، أساسها: $q=-\frac{3}{5}$، وحَدُّهَا الأول: $a_1=-\frac{6}{5}$، بما أنَّ: $|q|=\frac{3}{5}<1$، فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقَارِبَة (انظر الشكل 8.4)، ومجموعها:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{-\frac{6}{5}}{1+\frac{3}{5}}=-\frac{3}{4}.$$



شكل 8.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 50\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-3)^k}{5^k}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{13} \approx -0.7499999999$.

التمرين 10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}.$$

الحل: نلاحظ أنَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right).$$

المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ هَندسِيَّة، حَدُّهَا الأول: $\frac{1}{2}$، وأساسها: $q = \frac{1}{2} < 1$، فهي مُتَقارِبَة، ومجموعها:

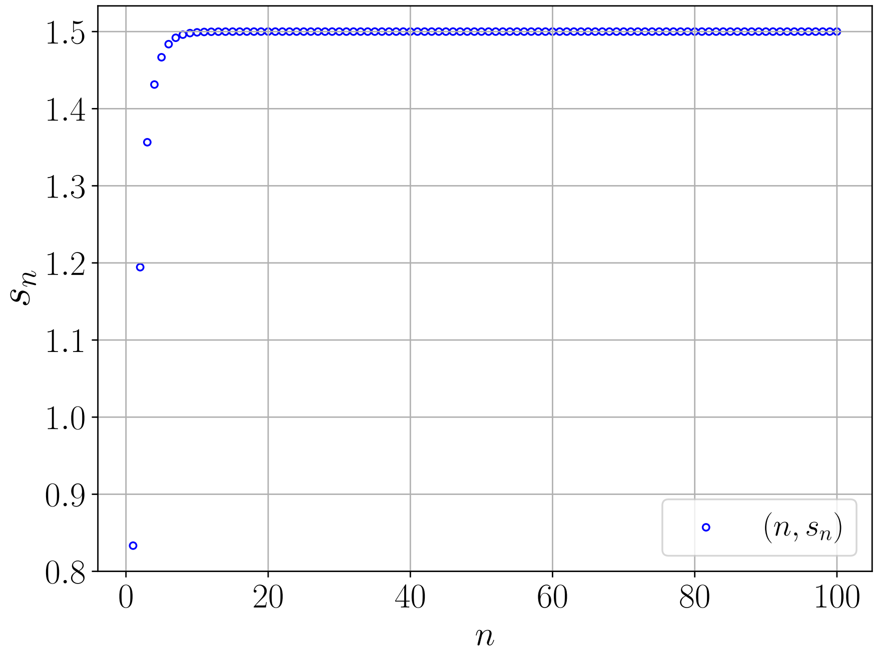
$$s_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

كما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ هَندسِيَّة، حَدُّهَا الأول: $\frac{1}{3}$، وأساسها: $q = \frac{1}{3} < 1$، فهي مُتَقارِبَة، ومجموعها:

$$s_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

(انظر الشكل 9.4). وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقارِبَة ومجموعها:

$$s = s_1 + s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$



شكل 9.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k+2^k}{6^k}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{100} = 1.5$.

التمرين 11

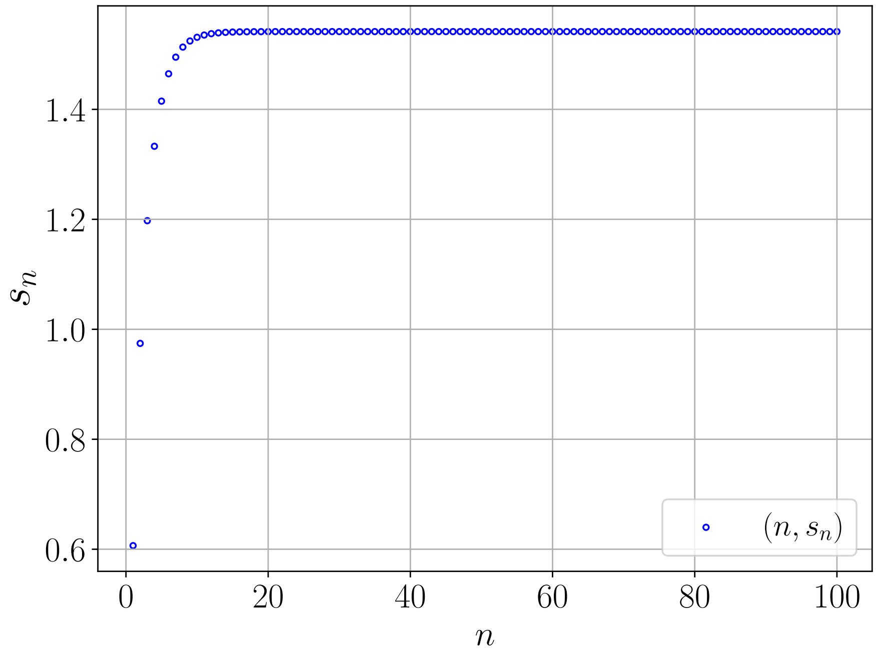
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^n}}.$$

الحل: نلاحظ أنَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة هندسيَّة، أساسها: $q = \frac{1}{\sqrt{e}}$، وحَدُّهَا الأول: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}$. بما أنَّ: $|q| = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$، فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقارِبَة (انظر الشكل 10.4)، ومجموعها:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{1-\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{\sqrt{e}-1} \approx 1.5415.$$



شكل 10.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{e^k}}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 1.541494$.

ملاحظة 18:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، إيجاد مجموع كل من المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{5^{n+1}}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-na};\ a > 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{3^n}, \qquad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

التمرين 12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}.$$

الحل: إنَّ: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$. ومنه فإنَّ الحد العام

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، يمكن كتابته بالشكل:

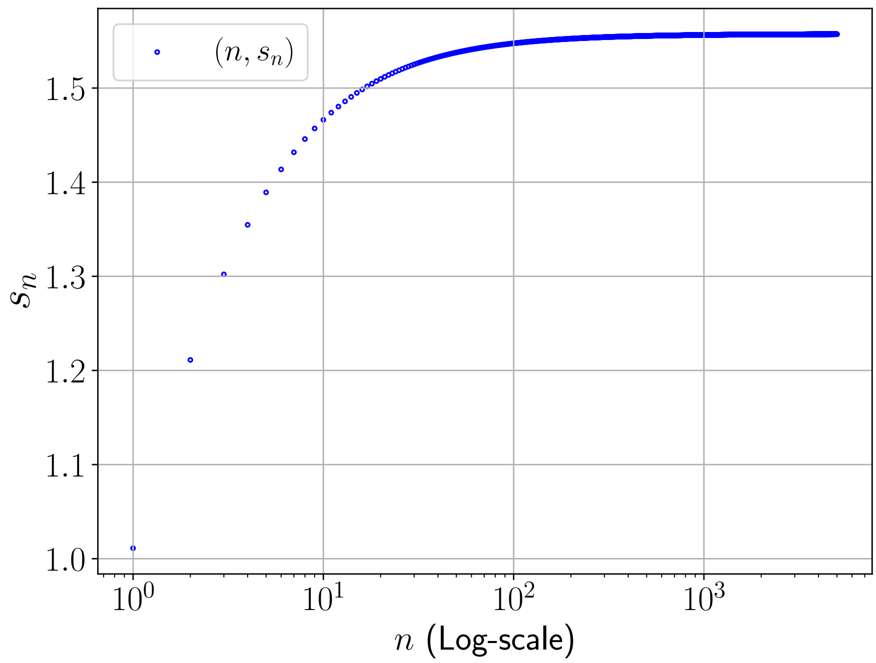
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} \\ &= \tan\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

ومنه لأجل الحد العام s_n، لمُتَتَالِيَة المَجَامِيْع الجُزئِيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، يكون:

$$\begin{aligned} s_n &= (\tan(1)-\tan(2))+(\tan(2)-\tan(3))+\ldots+\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \tan(1)-\tan\left(\frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

ومنه: $\lim_{n\to\infty} s_n = \tan(1)$. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $\tan(1)$ (انظر الشكل 11.4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \tan(1) \approx 1.5574.$$



شكل 11.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{5000} \approx 1.5572$.

التمرين 13

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right).$$

الحل: الحد العام للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابته بالشكل:

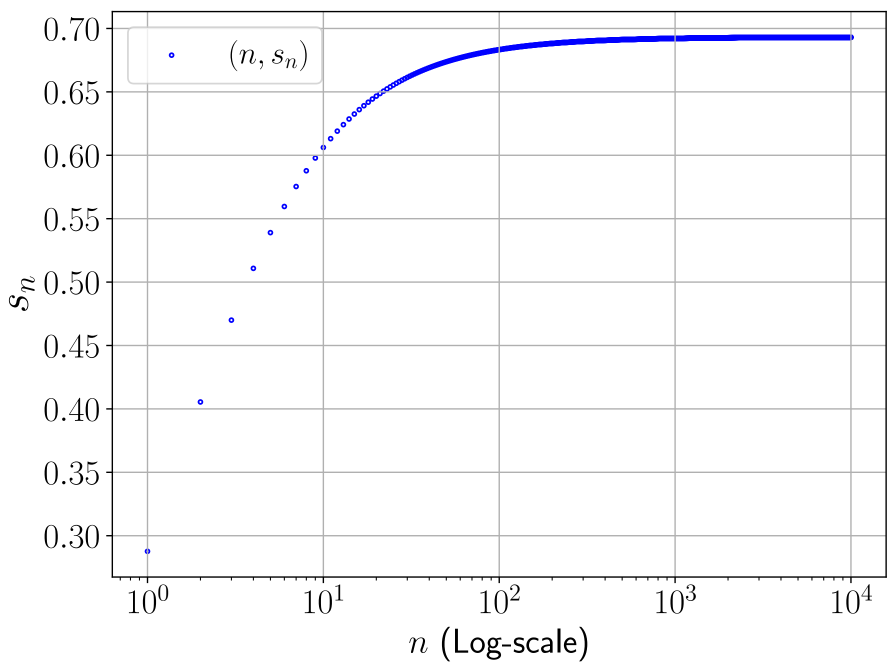
$$a_n = \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2).$$

ومنه لأجل الحد العام s_n، لمُتَتَالِيَة المَجَامِيعْ الجُزئِيَّة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$، يكون:

$$\begin{aligned} s_n &= (2\ln(2) - \ln(1) - \ln(3)) + (2\ln(3) - \ln(2) - \ln(4)) + (2\ln(4) - \ln(3) - \ln(5)) \\ &\quad (2\ln(5) - \ln(4) - \ln(6)) + \ldots + (2\ln(n-1) - \ln(n-2) - \ln(n)) \\ &\quad + (2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)) + (2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)) \\ &= \ln(2) + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

ومنه: $\lim_{n\to\infty} s_n = \ln(2)$. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $\ln(2)$. (انظر الشكل 12،4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln(2) \approx 0.6931.$$



شكل 12،4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)$، في هذا الشكل لدينا: $s_{10^4} \approx 0.6930$.

التمرين 14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right).$$

الحل: تذكر أنَّ:

$$\arctan(u) \pm \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u \pm v}{1 \mp uv}\right), \qquad \forall\, uv \neq \mp 1.$$

بوضع $a_n = \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$، نجد:

$$\begin{aligned}
a_n &= \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) = \arctan\left(\frac{2}{1-(1-n^2)}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{2}{1-(1-n)(1+n)}\right) = \arctan\left(\frac{(1-n)+(1+n)}{1-(1-n)(1+n)}\right) \\
&= \arctan(1-n) + \arctan(1+n) = \arctan(n+1) - \arctan(n-1).
\end{aligned}$$

ومنه:

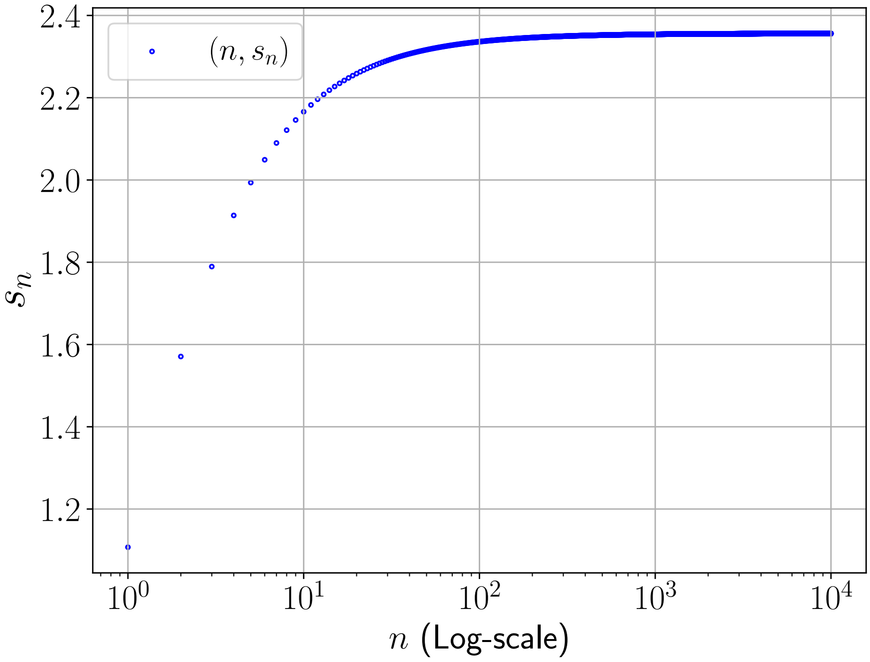
$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
&= \arctan(2) - \arctan(0) + \arctan(3) - \arctan(1) + \arctan(4) - \arctan(3) + \\
&\qquad \ldots + \arctan(n-1) - \arctan(n-3) + \arctan(n) - \arctan(n-2) + \\
&\qquad \arctan(n+1) - \arctan(n-1) \\
&= -\arctan(0) - \arctan(1) + \arctan(n) + \arctan(n+1),
\end{aligned}$$

ومنه نجد:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3\pi}{4}.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة ومجموعها يساوي $\frac{3\pi}{4}$ (انظر الشكل 13.4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) = \frac{3\pi}{4} \approx 2.3562.$$



شكل 13.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)$، في هذا الشكل لدينا: $s_{10^4} \approx 2.3559945$.

التمرين 15

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

الحل: بوضع $a_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$، نجد:

$$\begin{aligned} a_n &= \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan\left(\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}\right) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(n). \end{aligned}$$

ومنه:

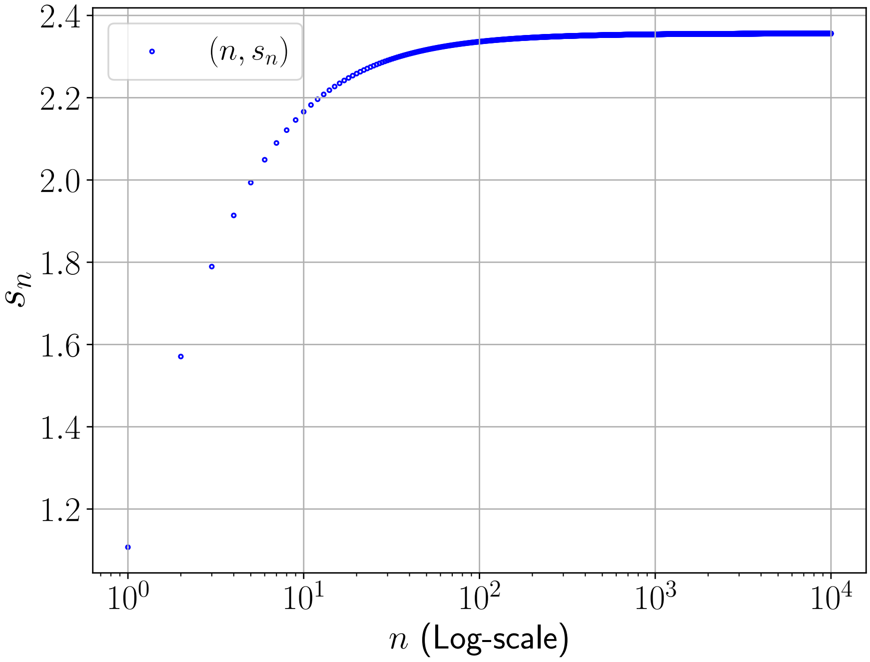
$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ &= \arctan(2) - \arctan(1) + \arctan(3) - \arctan(2) + \arctan(4) - \arctan(3) + \\ &\quad \ldots + \arctan(n) - \arctan(n-1) + \arctan(n+1) - \arctan(n) \\ &= -\arctan(1) + \arctan(n+1), \end{aligned}$$

ومنه نجد:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi}{4}.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة ومجموعها يساوي $\frac{\pi}{4}$ (انظر الشكل 14.4)، أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854.$$



شكل 14.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$، في هذا الشكل لدينا: $s_{10^4} \approx 0.785298$،

التمرين 16

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\left(\tfrac{n+1}{n+2}\right) - \arctan\left(\tfrac{n}{n+1}\right)\right).$$

الحل: لنضع $u = \frac{n+1}{n+2}$ و $v = \frac{n}{n+1}$، فنجد أنَّ:

$$\frac{u-v}{1+uv} = \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

ومنه:

$$\arctan\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right)$$

وبالتَّالي:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) \\
&= -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right).
\end{aligned}$$

لنحسب الآن مجموع المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$. بوضع: $a_n = \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$، نجد:

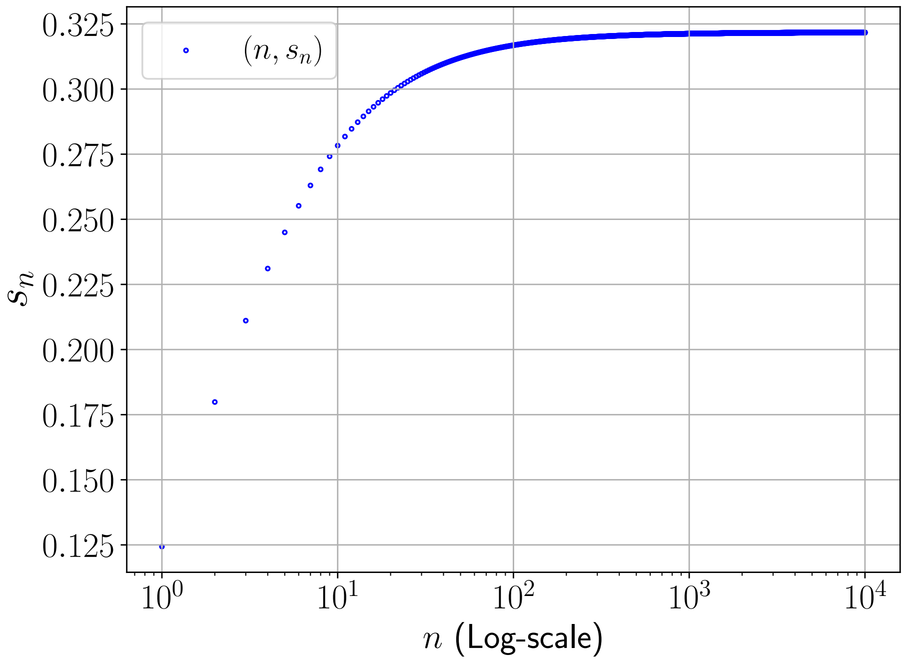
$$\begin{aligned} a_n &= \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \arctan\left(\frac{2}{4n^2}\right) = \arctan\left(\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}\right) \\ &= \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1). \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ &= \arctan(3) - \arctan(1) + \arctan(5) - \arctan(3) + \arctan(7) - \arctan(5) + \\ &\quad \ldots + \arctan(2n-1) - \arctan(2n-3) + \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1) \\ &= -\arctan(1) + \arctan(2n+1), \end{aligned}$$

ومنه نجد: $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi}{4}$. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ مُتَقَارِبَة ومجموعها يساوي $\frac{\pi}{4}$.
نتيجة لذلك نجد أنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطاة مُتقارِبَة ومجموعها يساوي $\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ (انظر الشكل 15.4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.3218.$$



شكل 15.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$، في هذا الشكل لدينا: $s_{10^4} \approx 0.3217$.

التمرين 17

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right).$$

الحل: بوضع: $a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$، نجد:

$$\begin{aligned}
s_n &= a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}\\
&=(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-2\sqrt{5}+\sqrt{4})+\\
&\qquad+(\sqrt{7}-2\sqrt{6}+\sqrt{5})+\ldots+\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)+\\
&\qquad+\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)+\left(\sqrt{n+3}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\\
&=-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}.
\end{aligned}$$

لكن:

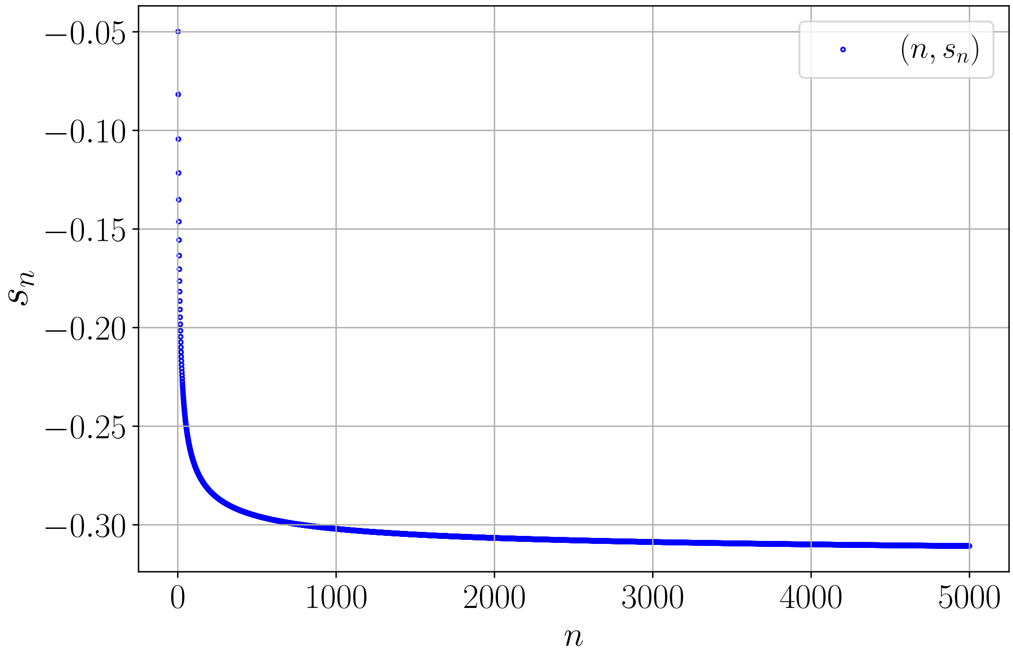
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}=0.$$

ومنه فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة ومجموعها يساوي $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (انظر الشكل 16.4)، أي:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\sqrt{2}-\sqrt{3}\approx-0.3178.$$



شكل 16.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2,3,\ldots,5000\}$ و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} a_k$، في هذا الشكل لدينا: $s_{5000} \approx -0.3107672$.

التمرين 18

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}.$$

الحل: الحد العام: $a_n = \frac{n+1}{n!}$، للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، يمكن كتابته بالشكل:

$$\frac{n+1}{n!} = \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{n}{n(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}; \quad (n \geqslant 1).$$

ومنه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

ومنه:

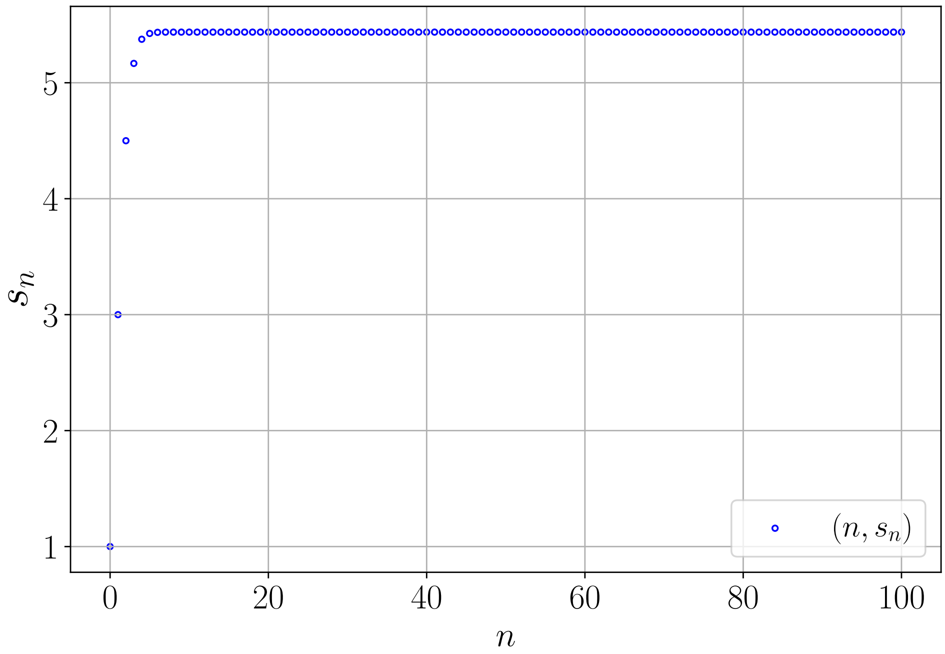
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} - \frac{1}{1!} = e + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} - 1 = e + e - 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقَارِبَة، ومجموعها يساوي $2e$ (انظر الشكل 17.4). أي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = 2e \approx 5.4366.$$



شكل 17.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{0, 1, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k!}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 5.4365636$.

التمرين 19

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!}.$$

الحل: الحد العام $a_n = \frac{n^2+3}{n!}$، للمُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة، يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned} \frac{n^2+3}{n!} &= \frac{n^2}{n!} + \frac{3}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} + \frac{3}{n!} \\ &= \frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{n!} \\ &= \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{n!}; \quad (n \geqslant 2). \end{aligned}$$

ومنه:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n!}.$$

ومنه:

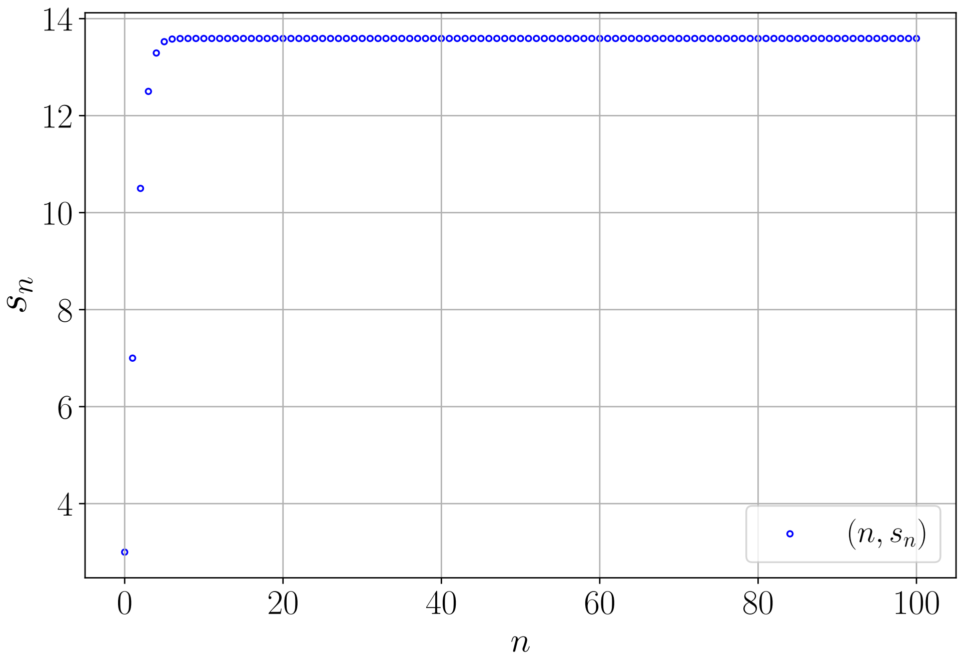
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3}{n!}-3-4=e+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{n!}-3-3.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3}{n!}-3-4=e+e-1+3e-3-3.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $5e$ (انظر الشكل 18.4). أي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3}{n!}=5e\approx 13.5914.$$



شكل 18.4: النقاط (n, s_n) حيث $n\in\{0,1,\ldots,100\}$ و $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3}{k!}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{100}\approx 13.5914$.

التمرين 20

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}.$$

الحل: الحد العام: $a_n = \frac{n^3}{n!}$، للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned}\frac{n^3}{n!} &= \frac{n\cdot n^2}{n(n-1)!} = \frac{n^2-1+1}{(n-1)!} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\\ &= \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{n-2}{(n-2)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}\\ &= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!};\quad (n \geqslant 3).\end{aligned}$$

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^3}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}.$$

ومنه:

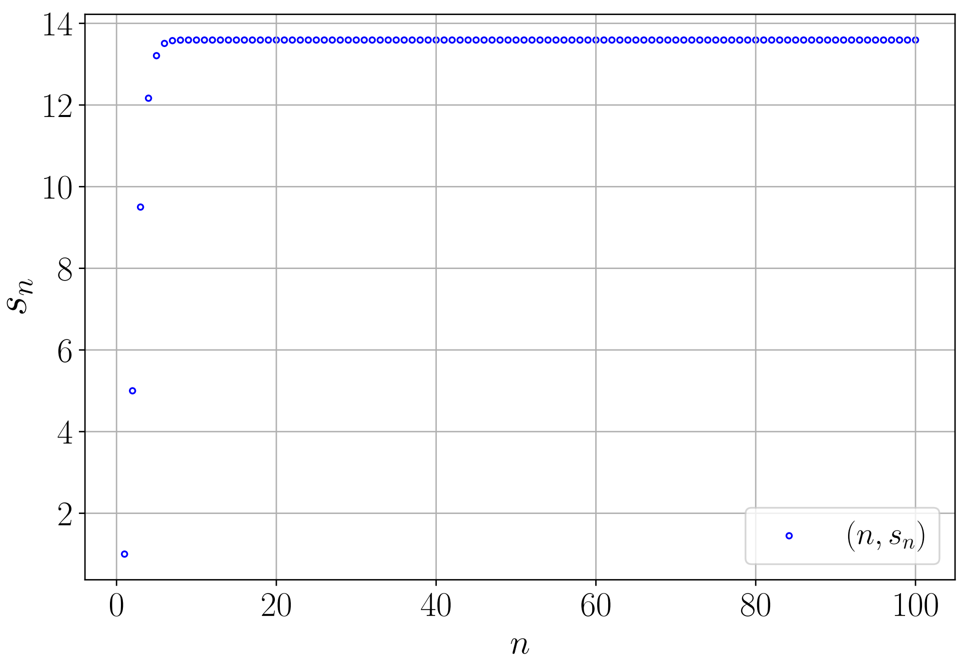
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!} - \frac{1}{1!} - \frac{2^3}{2!} = e + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!} - \frac{3}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}.$$

ومنه:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!} - 1 - 4 = e + 3e - 3 + e - 1 - 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $5e$ (انظر الشكل 19.4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!} = 5e \approx 13.5914.$$



شكل 19.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{k!}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 13.5914$.

التمرين 21

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n-1)!}.$$

الحل: الحد العام: $a_n = \frac{n^2+n-1}{(n-1)!}$، للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned}
\frac{n^2+n-1}{(n-1)!} &= \frac{n^2-1}{(n-1)!} + \frac{n}{(n-1)!} \\
&= \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \frac{n-2}{(n-2)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{4}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}; \quad (n \geqslant 3).
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n-1)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 4\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}.$$

ومنه:

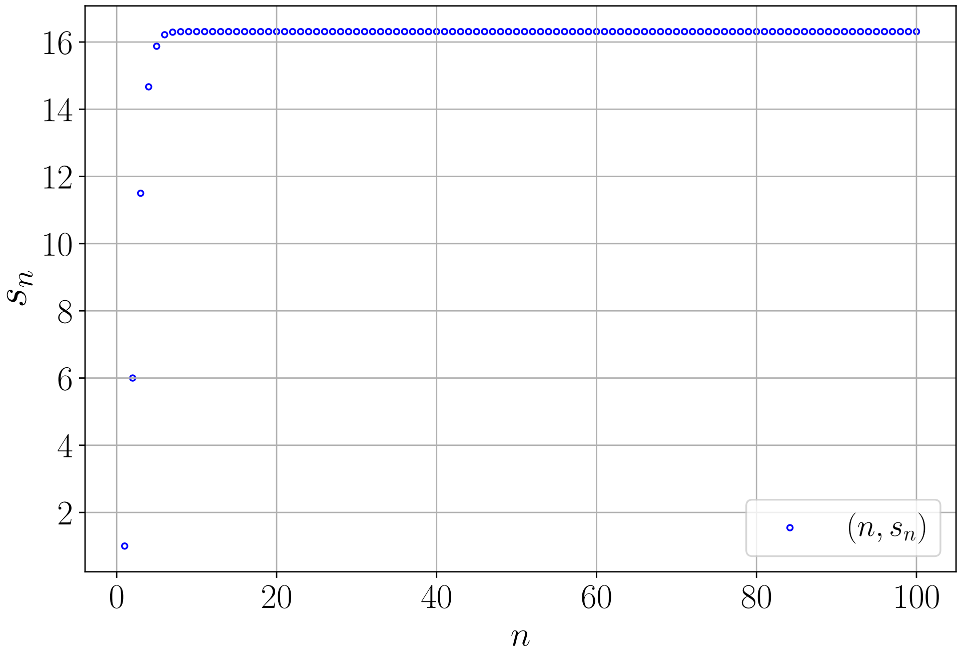
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n-1)!} - 1 - 5 = e + 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} - 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 1 - 1.$$

ومنه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n-1)!} - 1 - 5 = e + 4e - 4 + e - 1 - 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $6e$ (انظر الشكل 20.4)، أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n-1)!} = 6e \approx 16.3097.$$



شكل 20.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k-1)!}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 16.30969$.

التمرين 22

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{n!}.$$

الحل: الحد العام: $a_n = \frac{(n-1)^3}{n!}$، للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)^3}{n!} &= \frac{(n-1)(n-1)^2}{n(n-1)(n-2)!} = \frac{(n-1)^2}{n(n-2)!} = \frac{n^2-2n+1}{n(n-2)!} \\
&= \frac{n}{(n-2)!} - \frac{2}{(n-2)!} + \frac{1}{n(n-2)!} \\
&= \frac{n-2}{(n-2)(n-3)!} + \frac{2}{(n-2)!} - \frac{2}{(n-2)!} + \frac{n-1}{n(n-1)(n-2)!} \\
&= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}; \quad (n \geqslant 3).
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

ومنه:

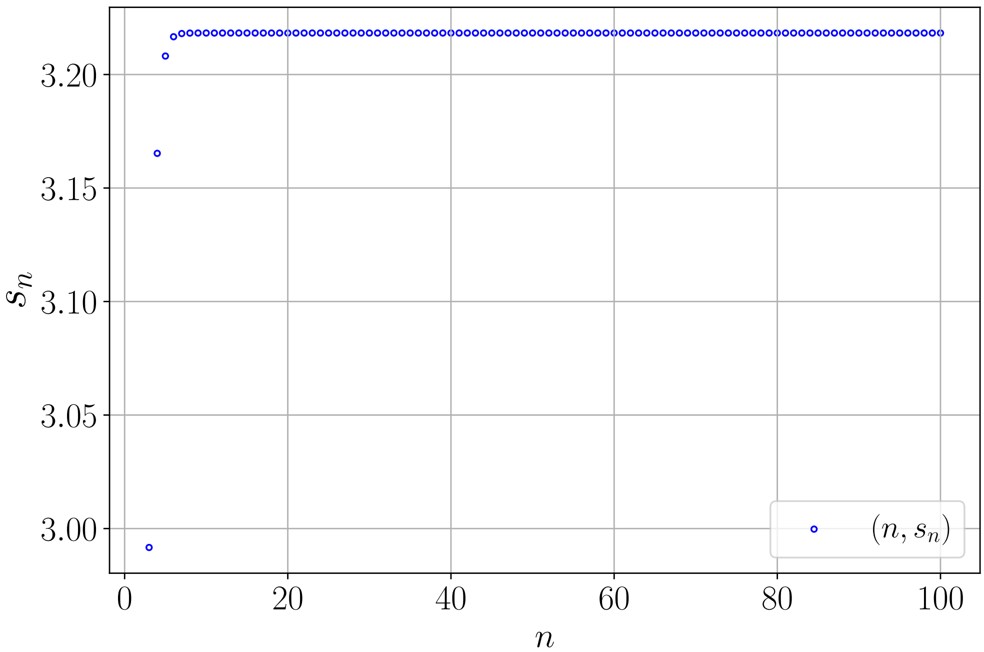
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{n!} = e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 1 - 1 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 - 1 - \frac{1}{2}\right).$$

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{n!} = e + e - 1 - 1 - \left(e - 1 - 1 - \frac{1}{2}\right).$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $e + \frac{1}{2}$ (انظر الشكل 21.4)، أي:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{n!} = e + \frac{1}{2} \approx 3.2183.$$



شكل 21.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{3, 4, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{(k-1)^3}{k!}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 3.21828$.

التمرين 23

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)!}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{n!}.$$

ومنه الحد العام:

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{n!} = \frac{n^2 - 3n + 2}{n!}$$

يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned}
\frac{n^2-3n+2}{n!} &= \frac{n\cdot n}{n!}-\frac{3n}{n!}+\frac{2}{n!}\\
&= \frac{n}{(n-1)!}-\frac{3}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}\\
&= \frac{n-1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{3}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}\\
&= \frac{1}{(n-2)!}-\frac{2}{(n-1)!}+\frac{2}{n!};\quad (n\geqslant 2).
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-3n+2}{n!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}-2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n!}.$$

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-3n+2}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}-1-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-2\right)+2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-\frac{5}{2}\right).$$

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-3n+2}{n!}=e-1-2\,(e-2)+2\left(e-\frac{5}{2}\right).$$

وبالتّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $e-2$ (انظر الشكل 22،4). أي:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{(n+1)!}=e-2\approx 0.7182818285.$$

التمرين 24

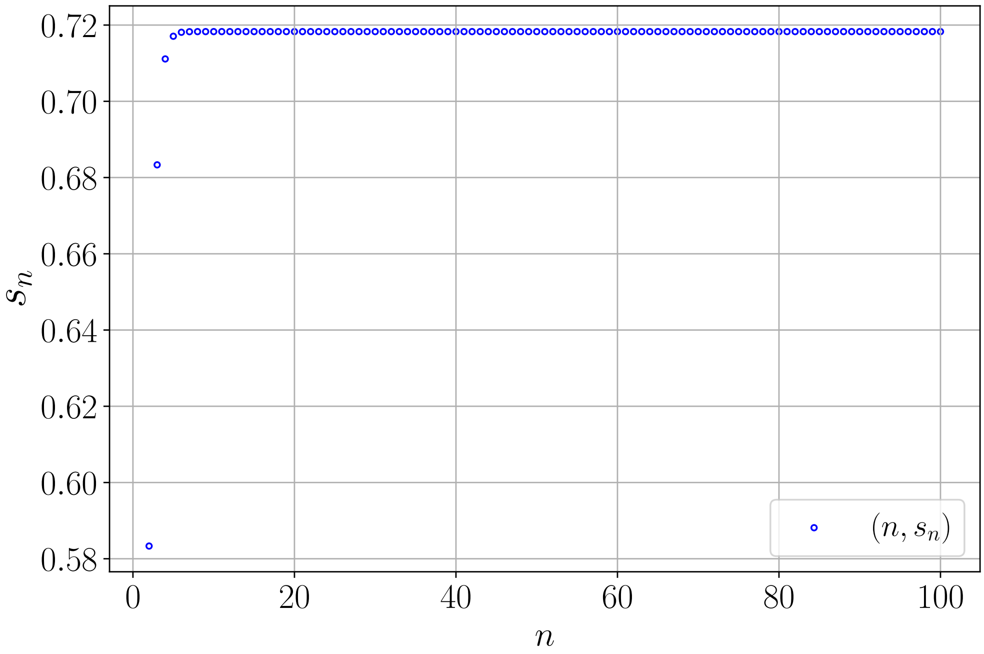
$\frac{1}{2!}+\frac{2^2}{3!}+\frac{3^2}{4!}+\dots$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n!}.$$

والحد العام: $a_n=\frac{(n-1)^2}{n!}$، يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)^2}{n!} &= \frac{n^2-2n+1}{n!}=\frac{n^2}{n!}-\frac{2n}{n!}+\frac{1}{n!}=\frac{n}{(n-1)!}-\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\\
&= \frac{n-1}{(n-1)(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\\
&= \frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!};\quad (n\geqslant 2)
\end{aligned}$$



شكل 22.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2, 3, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{(k+1)!}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 0.7182818284$.

ومنه:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

ومنه:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!} = e - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2.$$

وبالتّالي فإنّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $e-1$ (انظر الشكل 23.4). أي:

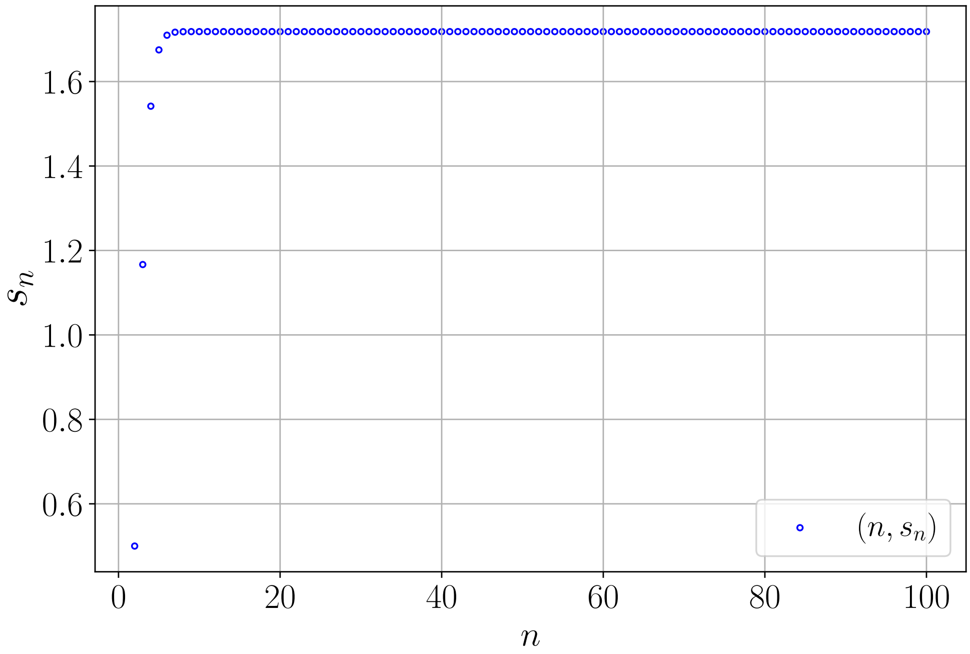
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!} = \frac{1}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \frac{3^2}{4!} + \ldots = e - 1 \approx 1.718281828.$$

التمرين 25

$1 + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \ldots$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}.$$



شكل 23.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2, 3, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^2}{k!}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 1.718281828$.

والحد العام: $a_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$، يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{(n-1)!} &= \frac{n^2-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \\
&= \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n-2)}{(n-2)(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \\
&= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}; \quad (n \geqslant 3)
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}.$$

ومنه:

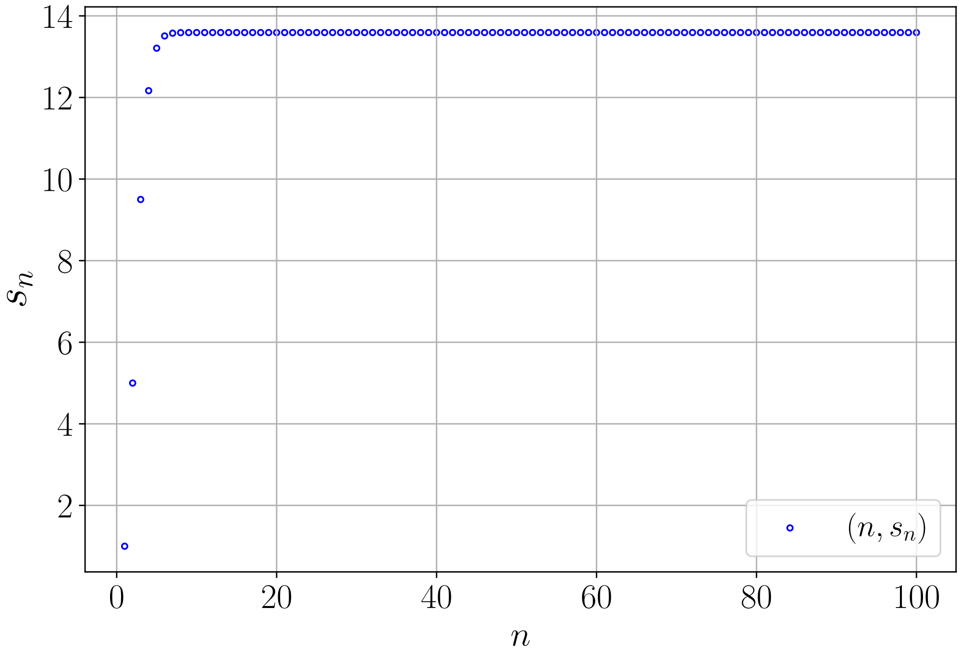
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} - 5 = e + 3\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} - 1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 2.$$

ومنه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} - 5 = e + 3\,(e-1) + e - 2.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة، ومجموعها يساوي $5e$ (انظر الشكل 24.4). أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = 1 + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \ldots = 5e \approx 13.59140914.$$



شكل 24.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{(k-1)!}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{100} \approx 13.59140914$.

ملاحظة 19:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، إيجاد مجموع كل من المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \ldots, \qquad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots$$

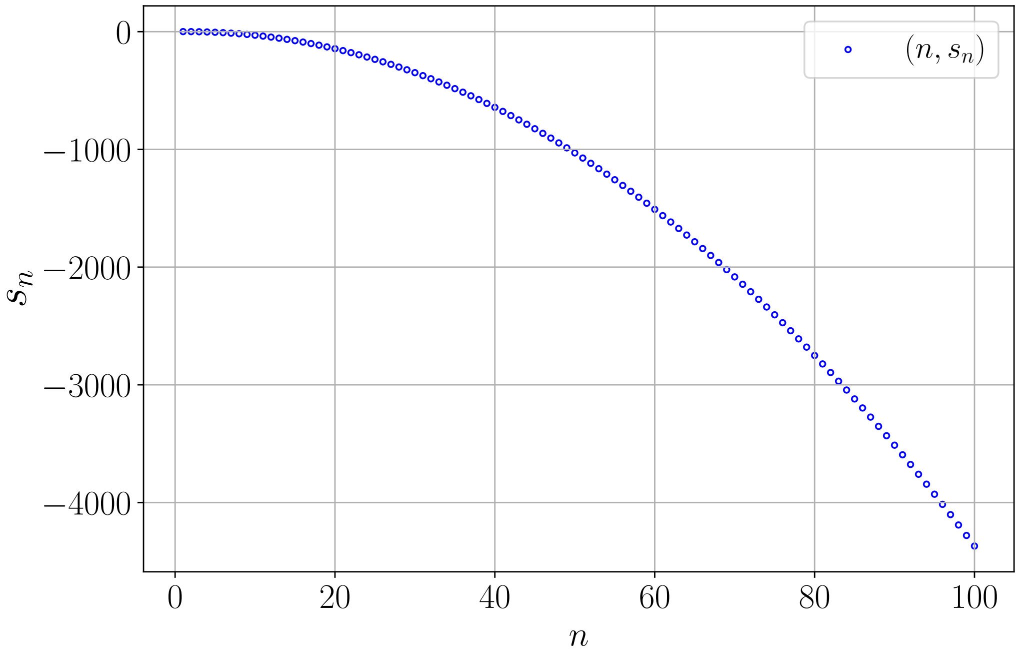
التمرين 26

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - n\right).$$

الحل: بوضع: $a_n = \sqrt{n+1} - n$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2 + n + 1}{\sqrt{n+1} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)} = -\infty \neq 0.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 25.4).



شكل 25.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - k)$.

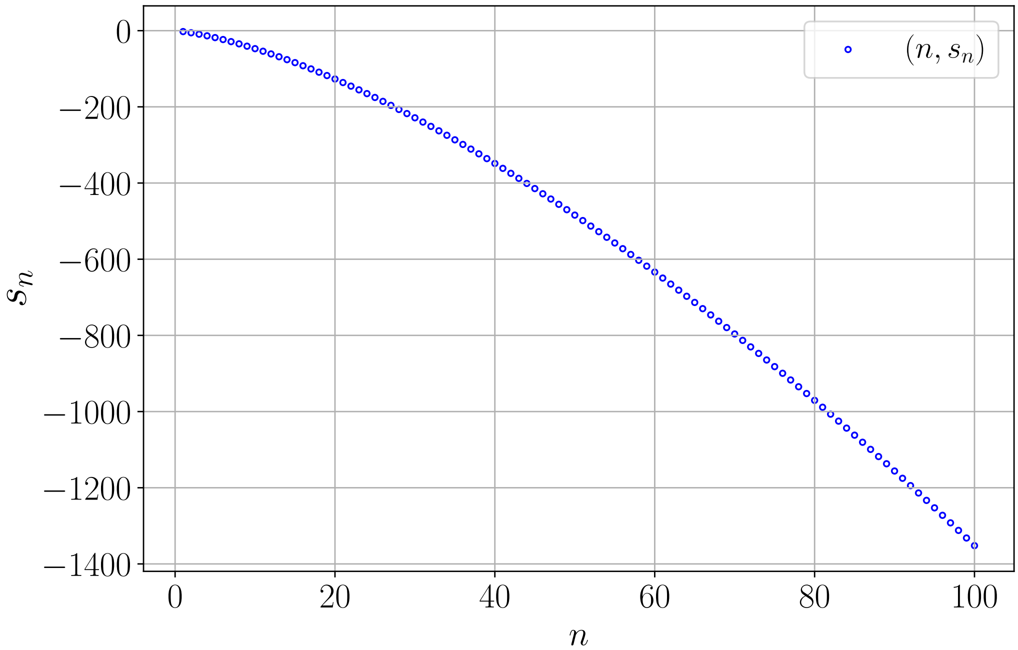
التمرين 27

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$. نجد:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = \lim_{n\to\infty} -(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}) = -\infty \neq 0.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 26.4).

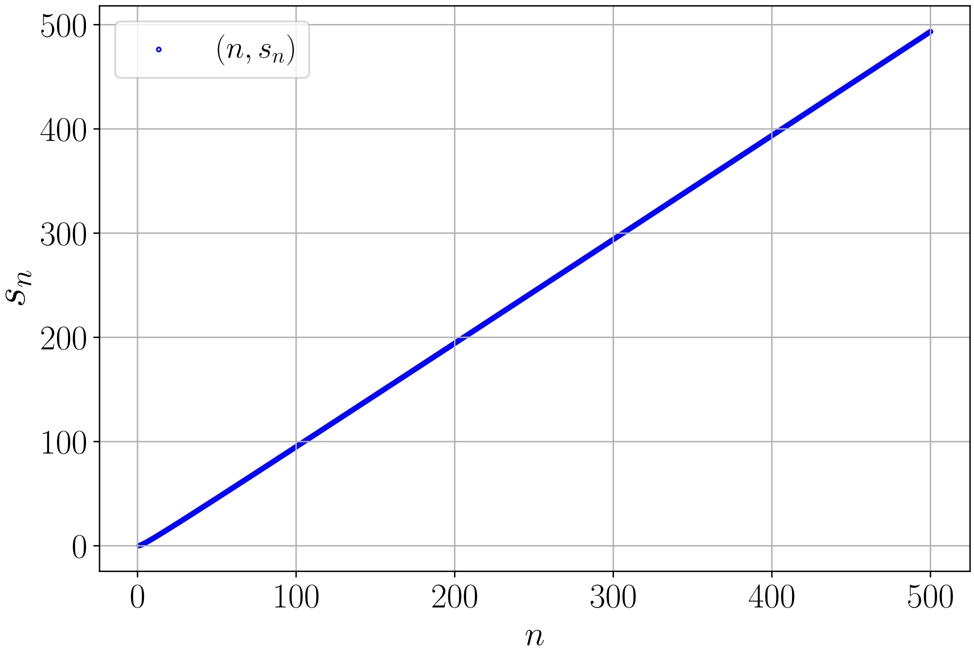


شكل 26.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}$.

التمرين 28

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \tfrac{1}{n}\right).$$

الحل: بوضع: $a_n = \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right)$، نجد: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 27.4).



شكل 27.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 500\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - \sin \frac{1}{k})$.

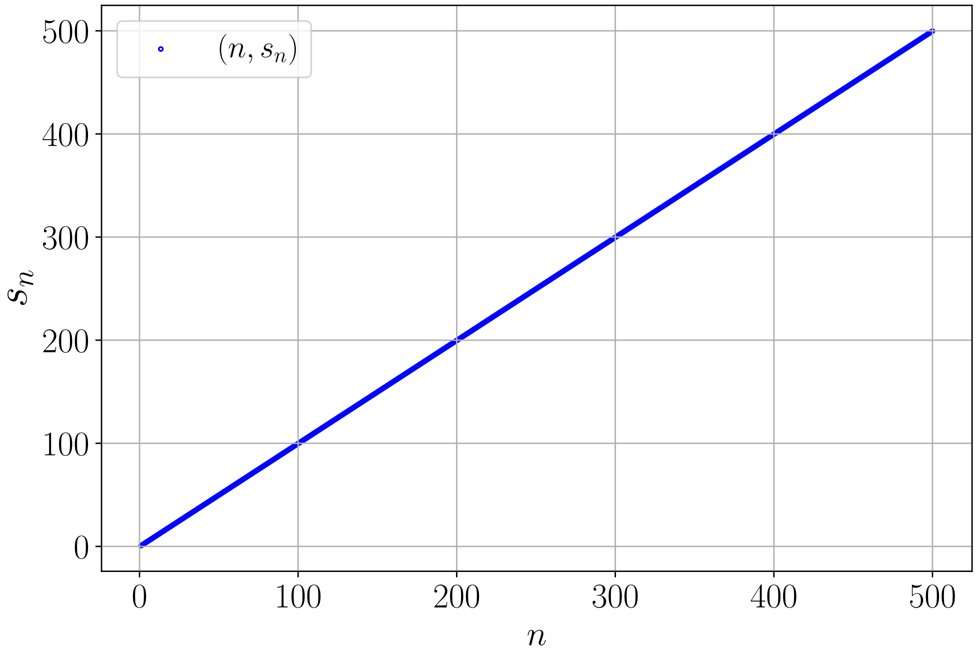
التمرين 29

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}.$$

الحل: بوضع: $a_n = n \sin \frac{1}{n}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 28.4).

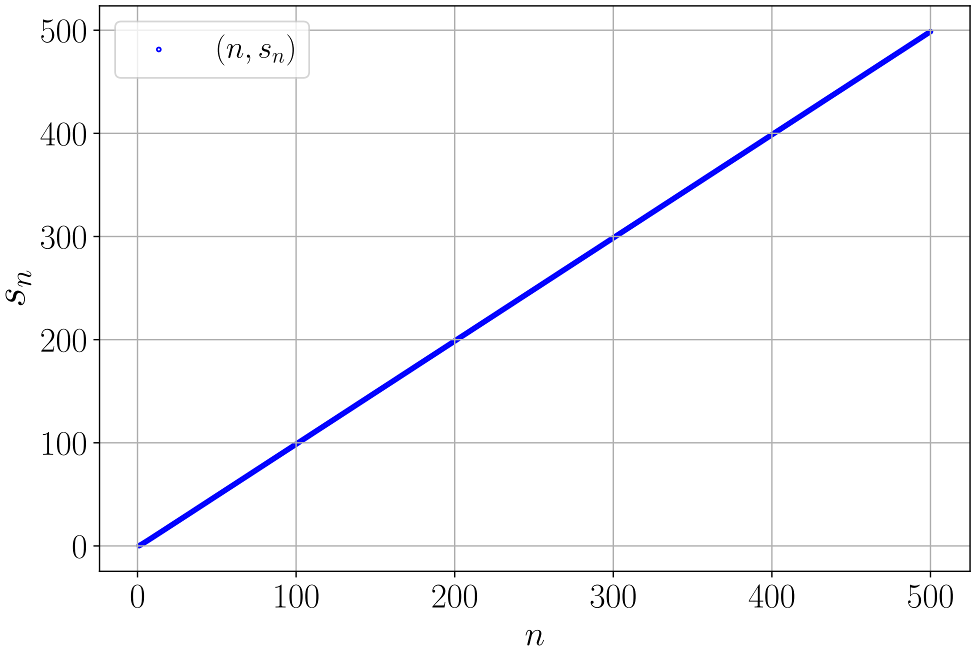


شكل 28.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 500\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \sin \frac{1}{k}$.

التمرين 30

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^2 \frac{1}{n}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \cos^2 \frac{1}{n}$، نجد: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1 \neq 0$. ومنه فالمُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 29.4).



شكل 29.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 500\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{1}{k}$.

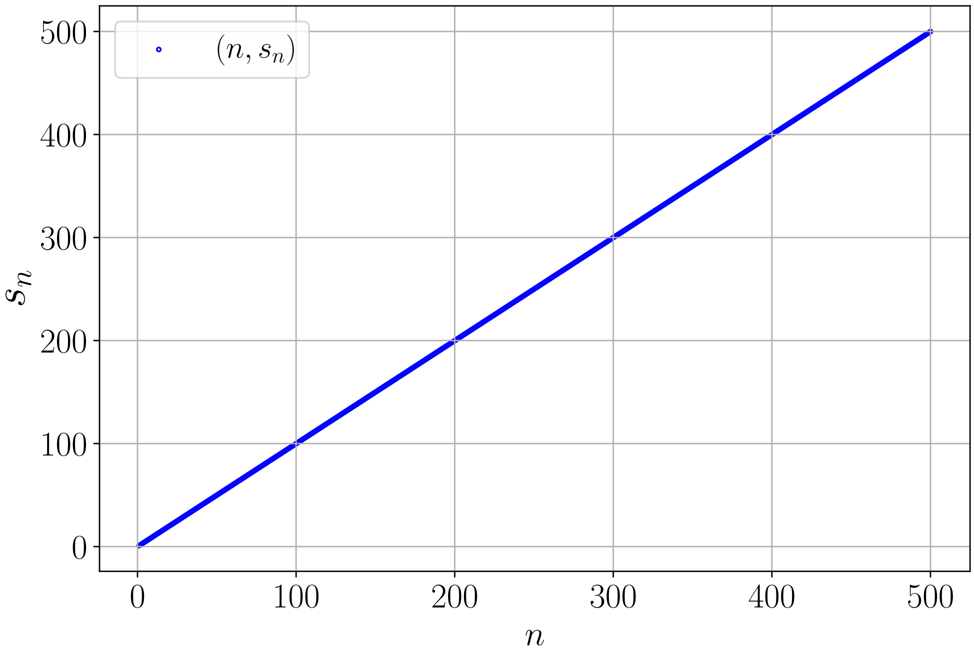
التمرين 31

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{\sin \frac{1}{n^2}}.$$

الحل: بوضع: $a_n = n\sqrt{\sin \frac{1}{n^2}}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}} = 1 \neq 0.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 30.4).



شكل 30.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 500\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} n\sqrt{\sin \frac{1}{k^2}}$.

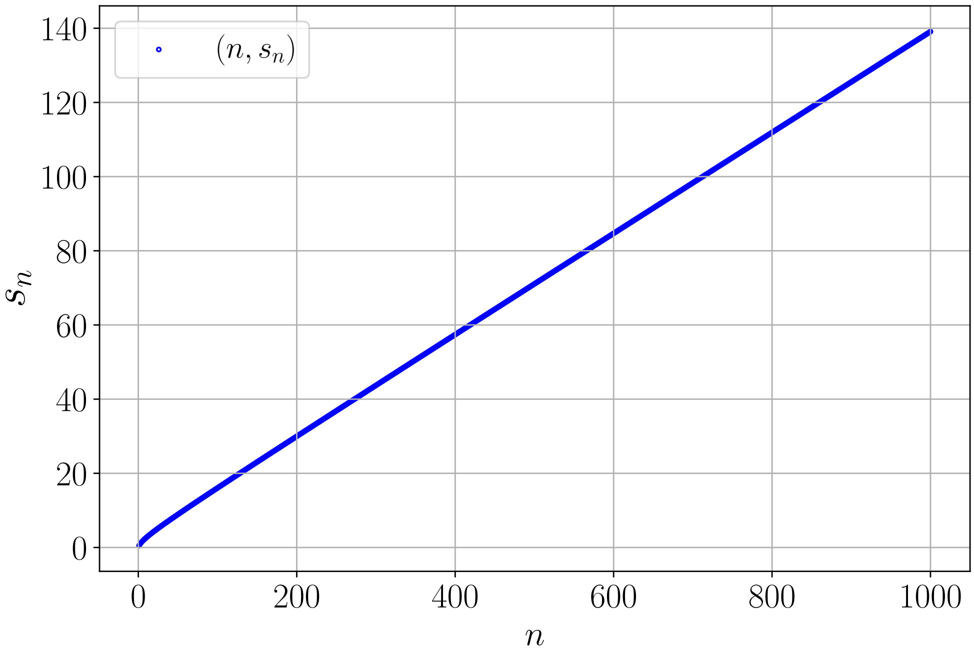
التمرين 32

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

الحل: بوضع: $a_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\cancel{n^n} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 31.4).



شكل 31.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^k$.

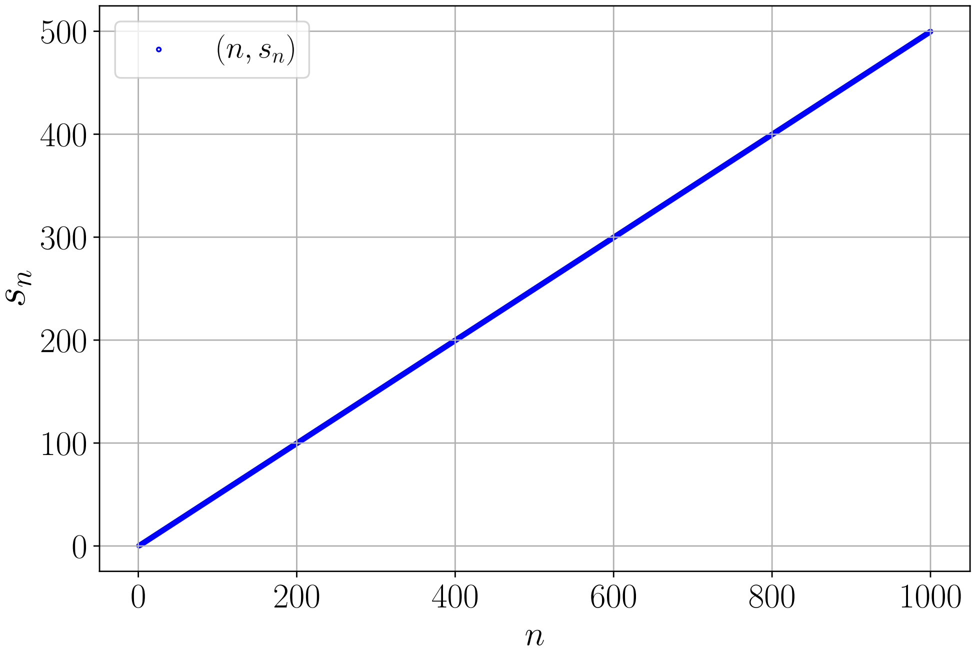
التمرين 33

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{19} + \frac{25}{51} + \ldots$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}.$$

بوضع: $a_n = \frac{n^2}{2n^2+1}$، نجد: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 32.4).



شكل 32.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2k^2+1}$.

التمرين 34

$\frac{3}{4} + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \ldots$

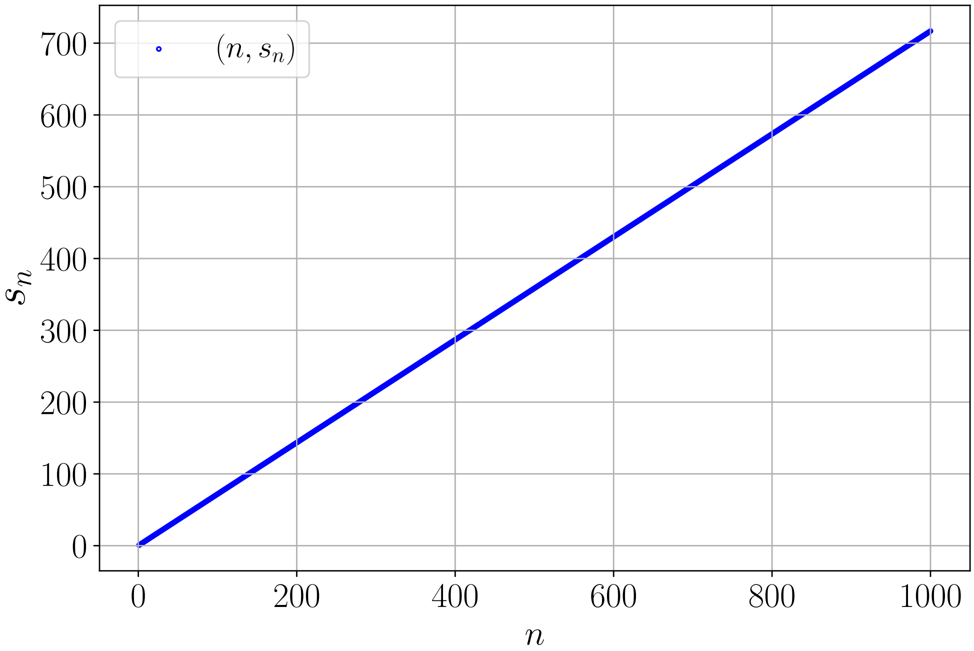
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n .$$

بوضع: $a_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$، نجد: $a_n = \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)^n$. ومنه بفرض: $3n + 1 = m$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)}{m}\right)^{\frac{m}{3}} \left(1 + \frac{(-1)}{m}\right)^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}} \neq 0.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 33.4).



شكل 33،4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3k}{3k+1}\right)^k$.

التمرين 35

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^4 n}.$$

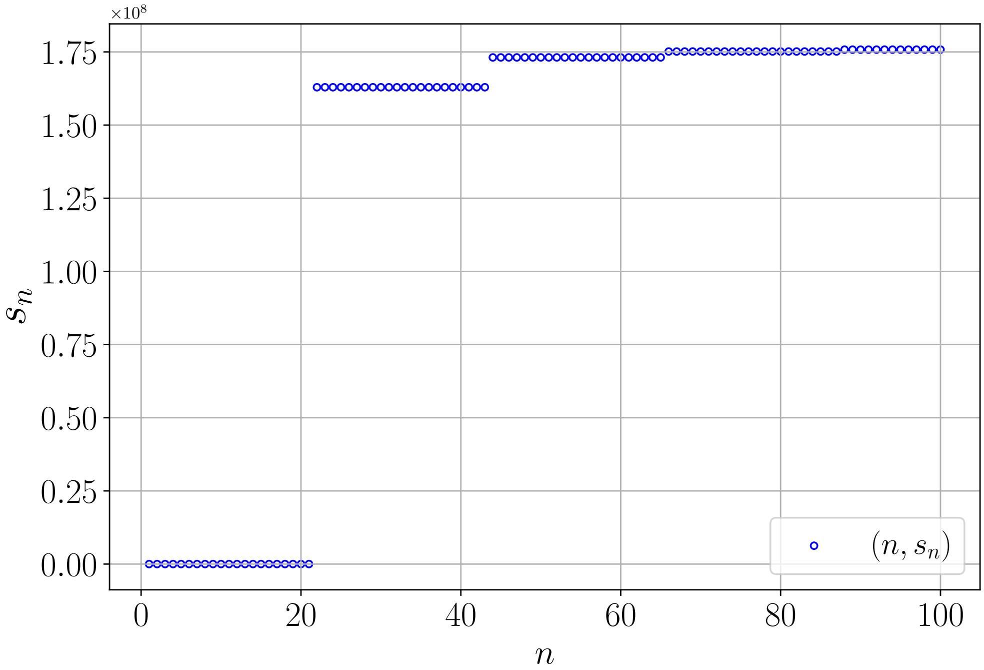
الحل: إنَّ: $0 < \sin^4 n < 1$. ومنه: $\frac{1}{\sin^4 n} > 1$. وبالتَّالي فإنَّه بوضع: $a_n = \frac{1}{\sin^4 n}$، نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sin^4 n} \neq 0$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 34،4). إذ إنَّ المُتَتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ تَتَبَاعَد إلى اللانهاية بسرعة كبيرة جدًا. إذ إنَّ:

$$s_{21} \approx 4932, \quad s_{22} \approx 162923256, \quad s_{50} \approx 173117028,$$

$$s_{350} \approx 354988231, \quad s_{500} \approx 1.211 \times 10^{18}.$$



شكل 34.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^4 k}$.

التمرين 36

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot e^{\sqrt{n}}}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة ذات حدود غير سالبة، حيث:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot e^{\sqrt{n}}} > 0, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

لنأخذ الدَّالَّة:

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+; \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}}.$$

إنَّ الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[1, +\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}} + 1\right)}{2x^2 \cdot e^{2\sqrt{x}}} < 0, \qquad \forall x \in [1, +\infty[.$$

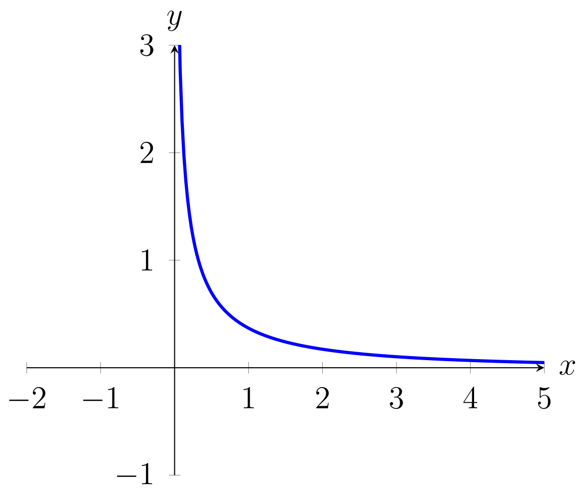
ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحَقَّقة (انظر الشكل 35.4). كما أنَّ:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

لنأخذ التحويل: $\sqrt{x}=t$، ومنه: $dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$، وبالتَّالي:

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{\sqrt{b}} 2e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty} -2\left[e^{-t}\right]_{1}^{\sqrt{b}} = \lim_{b\to\infty} -2\left(e^{-\sqrt{b}}-e^{-1}\right) = \frac{2}{e}.$$

وبالتَّالي فإنَّ التَّكامُل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ مُتقَارِب. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي (انظر الشكل 36.4).



شكل 35.4: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}$ ضمن المجال $]0,\infty[$.

التمرين 37

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة ذات حدود غير سالبة، حيث:

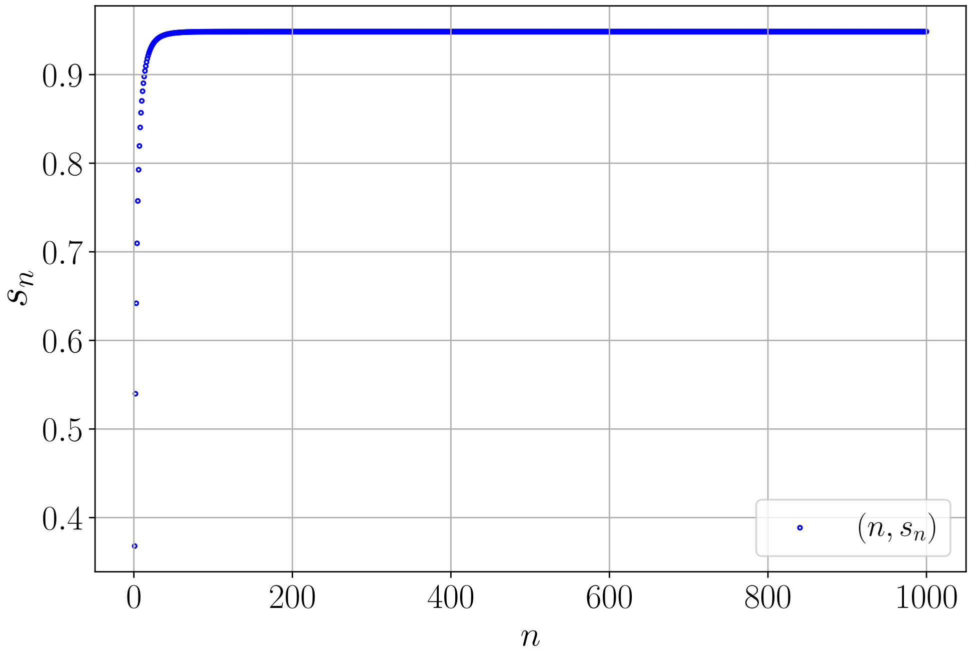
$$a_n=\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}>0, \quad \forall n\geqslant 1.$$

لنأخذ الدَّالَّة:

$$f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}^{+}; \quad f(x)=\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}.$$

إنَّ الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[1,+\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x)=-\frac{\left(1+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^4\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}=-\frac{\left(1+x\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)}{x^4\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}<0, \quad \forall x\in[1,+\infty[.$$



شكل 36.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$، و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot e^{\sqrt{k}}}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{1000} \approx 0.9485397$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ مجموع المُتَسَلْسِلَةَ في التمرين 36 يساوي تقريباً 0.9485397.

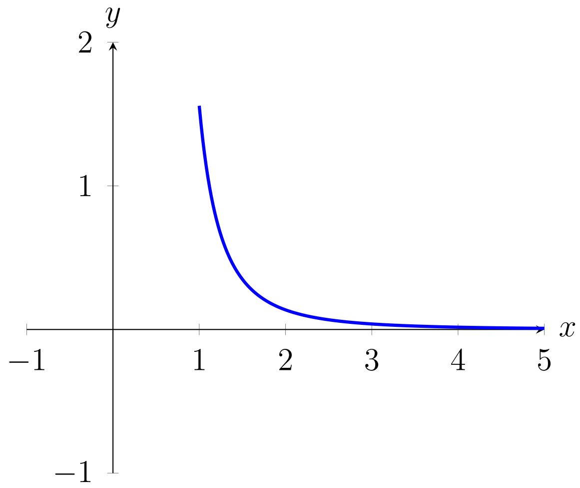
ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحقَّقة (انظر الشكل 37.4). كما أنَّ:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx.$$

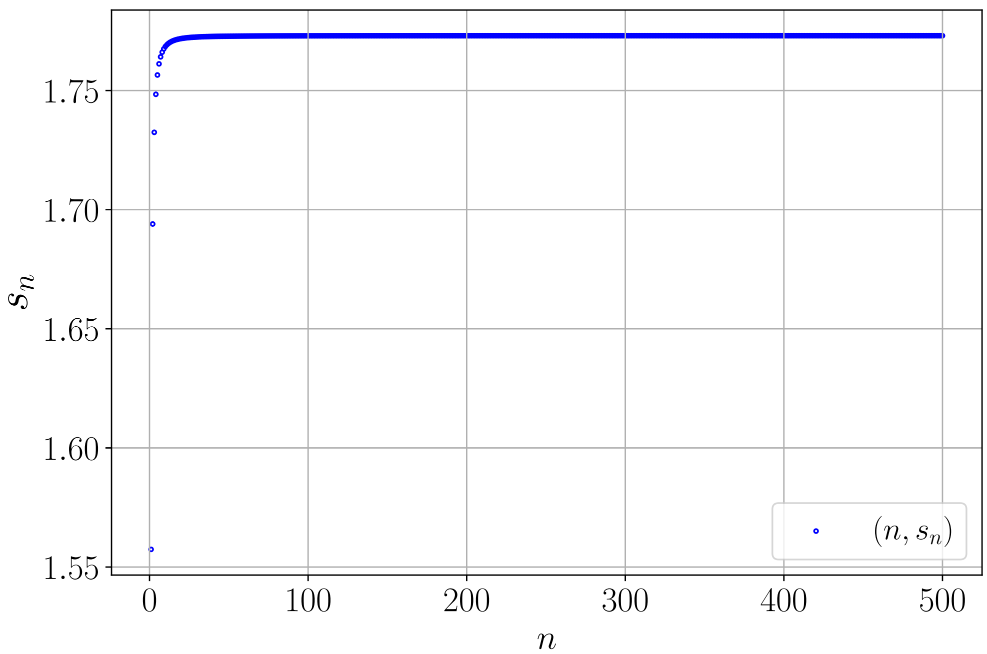
لنأخذ التحويل: $t = \frac{1}{x}$، ومنه: $\frac{dx}{x^2} = -dt$. وبالتَّالي:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{1/b} -\tan(t)dt = \lim_{b \to \infty} \left[\ln(\cos(t))\right]_1^{1/b} = -\ln(\cos(1))$$

وبالتَّالي فإنَّ التَّكامُل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ مُتقَارِب. ومنه فالمُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتقَارِبَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي (انظر الشكل 38.4).



شكل 37.4: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x) = \frac{\tan(\frac{1}{x})}{x^2}$ ضمن المجال $[1, \infty[$.



شكل 38.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 500\}$، و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tan(\frac{1}{k})}{k^2}$. في هذا الشكل لدينا: $s_{500} \approx 1.773005527$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ مجموع المُتَسَلْسِلَة في التمرين 37 يساوي تقريبًا 1.77301، إذ إنَّ: $s_{10^4} \approx 1.7730075185$

التمرين 38

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{\ln(\ln(n))}}{n \ln(n)}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة ذات حدود غير سالبة، حيث:

$$a_n = \frac{2^{\ln(\ln(n))}}{n\ln(n)} > 0, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

لنأخذ الدَّالَّة:

$$f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}^+; \qquad f(x) = \frac{2^{\ln(\ln(x))}}{x\ln(x)}.$$

إنَّ الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[2, +\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = \frac{(\ln(2) - 1 - \ln(x))2^{\ln(\ln(x))}}{x^2\ln^2(x)} < 0, \qquad \forall x \in [2, +\infty[.$$

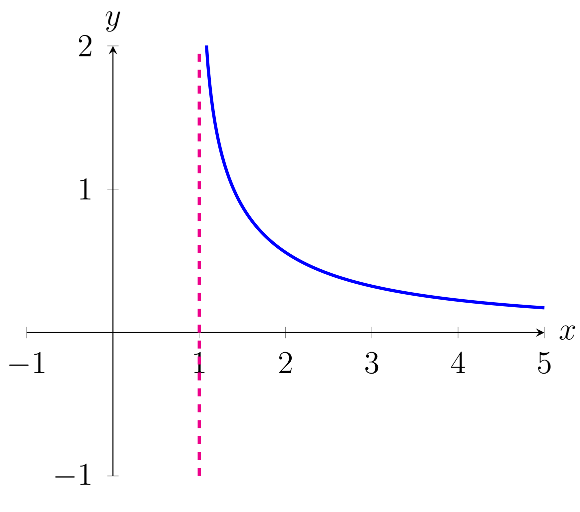
ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحقَّقة (انظر الشكل 39.4). كما أنَّ:

$$\int_{10}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{10}^{b} \frac{2^{\ln(\ln(x))}}{x\ln(x)}dx.$$

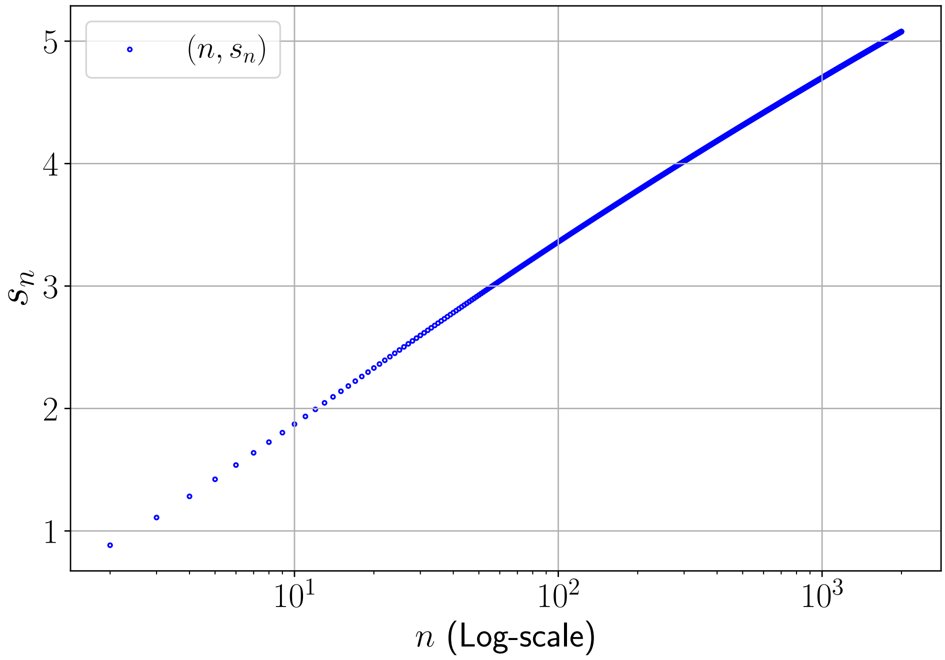
لنأخذ التحويل: $\ln(\ln(x)) = t$، ومنه: $\frac{dx}{\ln(\ln(x))} = dt$. وبالتَّالي:

$$\int_{2}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln(\ln(2))}^{\ln(\ln(b))} 2^t dt = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{2^t}{\ln(2)}\right]_{\ln(\ln(2))}^{\ln(\ln(b))} = \infty.$$

وبالتَّالي فإنَّ التَّكامُل $\int_2^\infty f(x)dx$ مُتباعِد. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي (انظر الشكل 40.4).



شكل 39.4: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x) = \frac{2^{\ln(\ln(x))}}{x\ln(x)}$ ضمن المجال $]1, \infty[$.



شكل 40.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2, 3, \dots, 2000\}$، و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2^{\ln(\ln(k))}}{k\ln(k)}$.

من الشكل 40.4 نلاحظ أنَّ المُتَتَالِيَةَ $\{s_n\}_{n\geqslant 2}$ تَتَبَاعَدَ إلى اللانهاية بشكل بطيء جدًا. إذ إنَّ:

$$s_{10^4} \approx 5.915912956,\ s_{10^5}\ 7.040419557,\ s_{10^6}\ 8.097539697,\ s_{10^7} \approx 9.101683409.$$

التمرين 39

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan(n)}}{n^2+1}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة ذات حدود غير سالبة، حيث:

$$a_n = \frac{e^{\arctan(n)}}{n^2+1} > 0, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

لنأخذ الدَّالَّة:

$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+; \qquad f(x) = \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2+1}.$$

إنَّ الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[1, +\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = \frac{(1-2x)e^{\arctan(x)}}{(x^2+1)^2} < 0, \qquad \forall x \in [1, +\infty[.$$

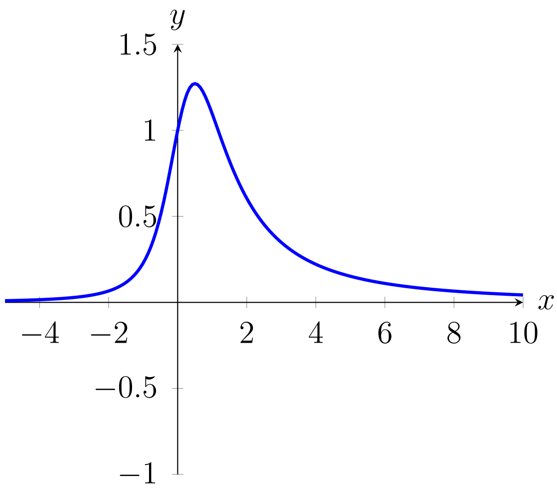
ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحقَّقة (انظر الشكل 41.4). كما أنَّ:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2+1}dx.$$

لنأخذ التحويل: $\arctan(x) = t$، ومنه: $\frac{dx}{1+x^2} = dt$. وبالتَّالي:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{\pi/4}^{\arctan(b)} e^t dt = \lim_{b\to\infty}\left(e^{\arctan(b)} - e^{\pi/4}\right) = e^{\pi/2} - e^{\pi/4}.$$

وبالتَّالي فإنَّ التَّكامُل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ مُتقَارِب. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقَارِبَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي (انظر الشكل 42.4).



شكل 41.4: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x) = \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2+1}$.

التمرين 40

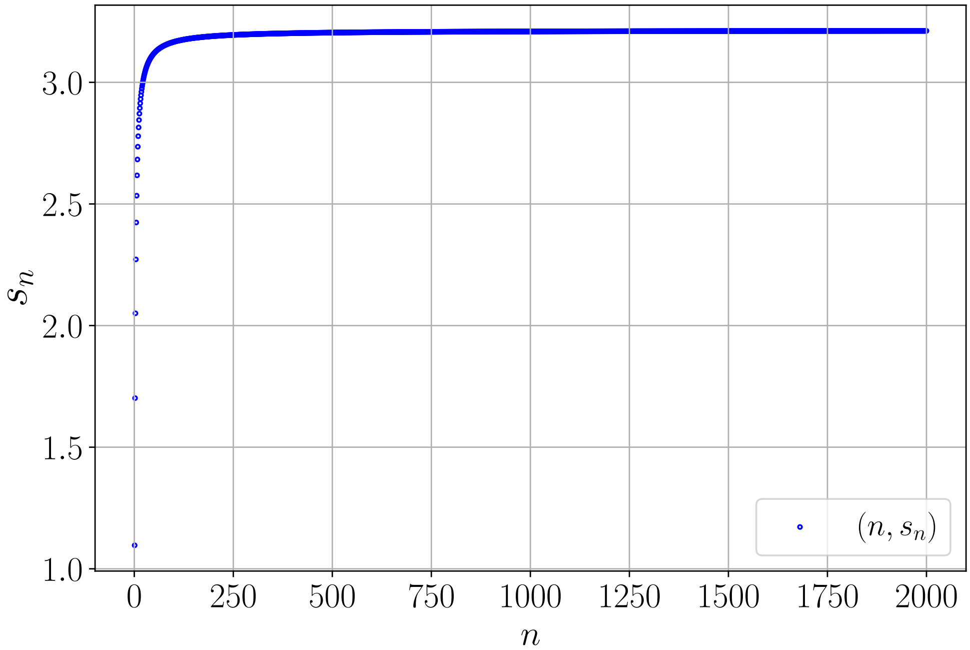
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

الحل: إنَّ: $n! \ll n^n$ (لأجل $n \longrightarrow \infty$). ومنه: $\frac{1}{n\ln(n)} > \frac{1}{\ln(n!)}$. لندرس الآن المُتَسَلْسِلَة الآتية، ذات الحدود الموجبة:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$$

لنأخذ الدَّالَّة:

$$f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+; \quad f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}.$$



شكل 42.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 2000\}$، و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{\arctan(k)}}{k^2+1}$ في هذا الشكل لدينا: $s_{2000} \approx 3.2115824$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ مجموع المُتَسَلْسِلَةَ في التمرين 39 يساوي تقريبًا 3.214، إذ إنَّ: $s_{10^4} \approx 3.2135054$.

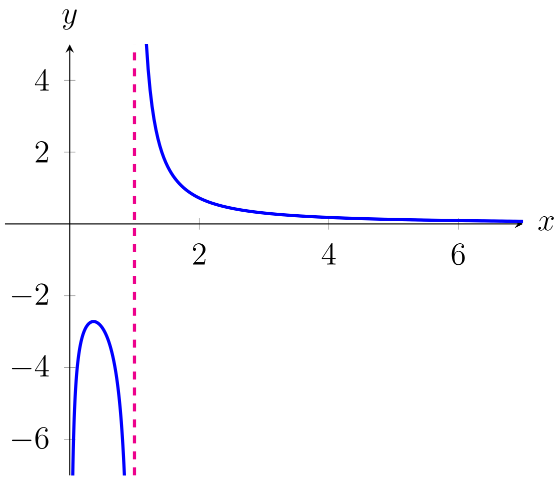
إن الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[2,+\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{x^2\ln^2(x)} < 0, \qquad \forall x \in [2,+\infty[.$$

ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحقَّقة (انظر الشكل 43.4). كما أنَّ:

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(\ln(x))\right]_2^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\right) = \infty.$$

وبالتَّالي فإنَّ التَّكامُل $\int_2^{\infty} f(x)dx$ مُتَباعِد. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ مُتَباعِدَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي. وحسب اختبار المُقارَنة الأول نستنتج أنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 44.4).



شكل 43.4: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ ضمن $]0,1[\cup]1,\infty[$.

من الشكل 44.4 نلاحظ أنَّ المُتتالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 2}$ تَتَباعَد إلى اللانهاية بشكل بطيء جدًا. إذ إنَّ:

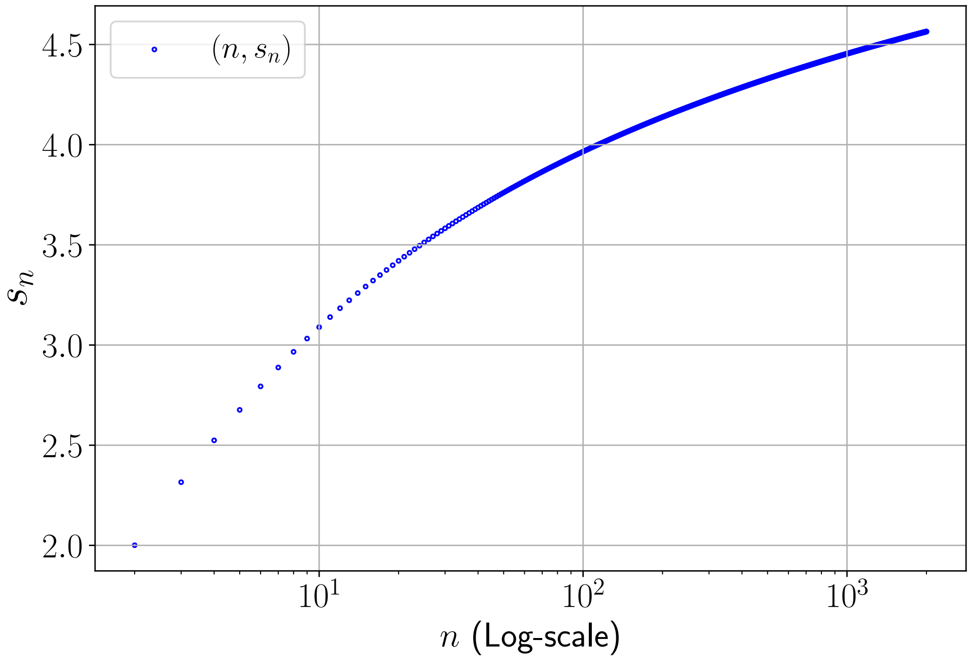
$$s_{10^4} \approx 4.782674072, \quad s_{20000} \approx 4.86370899, \quad s_{30000} \approx 4.908238265.$$

التمرين 41

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)+\sqrt{\ln^3(n)}}.$$

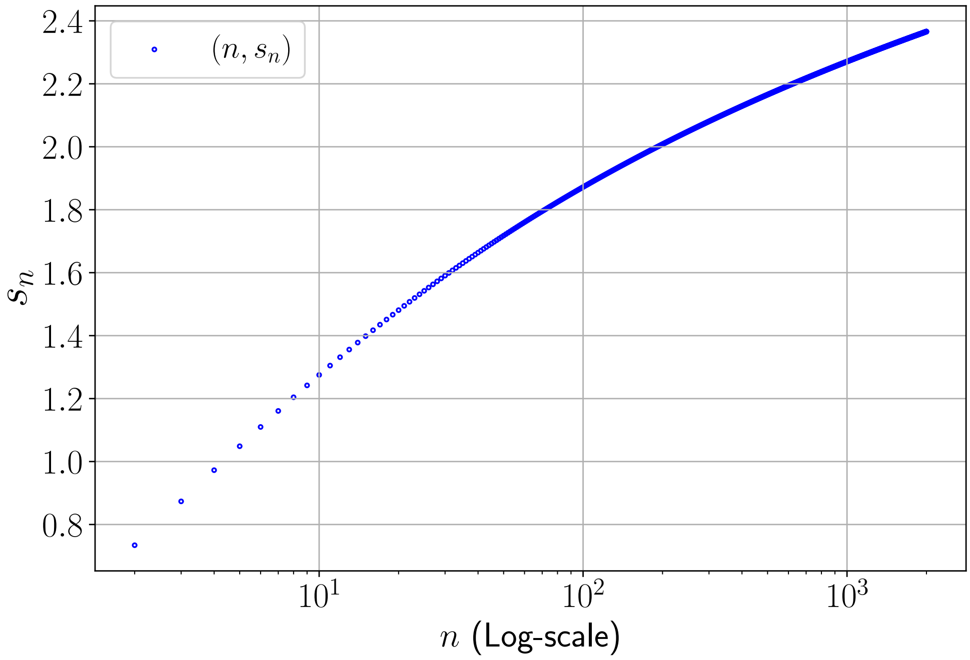
الحل: لنضع: $a_n = \frac{1}{n\ln(n)+\sqrt{\ln^3(n)}}$ ولنأخذ المُتَسَلْسِلَة المُتَباعِدَة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ (انظر التمرين 40). ليكن: $b_n = \frac{1}{n\ln(n)}$. ومنه نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n)}{n\ln(n)\left(1+\frac{\sqrt{\ln(n)}}{n}\right)} = 1.$$



شكل 44.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2, 3, \ldots, 2000\}$، و $s_n = \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\ln(k!)}$.

حيث: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(n)}}{n} = 0$، (تَحَقَّقْ من ذلك، يمكن تطبيق قاعدة لُوبِيتَال). ومنه حسب اختبار المُقَارَنة الثاني، المُتَسَلسِلَتَان $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة، مما يعني أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 45.4).



شكل 45.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2, 3, \dots, 2000\}$، و $s_n = \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k\ln(k)+\sqrt{\ln^3(k)}}$.

من الشكل 45.4 نلاحظ أنَّ المُتتالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 2}$ تَتَباعَدَ إلى اللانهاية بشكل بطيءٍ جداً، إذ إنَّ:

$$s_{10^4} \approx 2.55787208, \quad s_{10^5} \approx 2.7809721, \quad s_{10^6} \approx 2.96328989, \quad s_{10^7} \approx 3.11744023.$$

التمرين 42

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة ذات حدود غير سالبة، حيث:

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}} > 0, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

لنأخذ الدَّالَّة:

$$f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+; \qquad f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}.$$

إنَّ الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[2, +\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = -\frac{1 + 2\ln(x)}{2x^2\sqrt{\ln^3(x)}} < 0, \qquad \forall x \in [2, +\infty[.$$

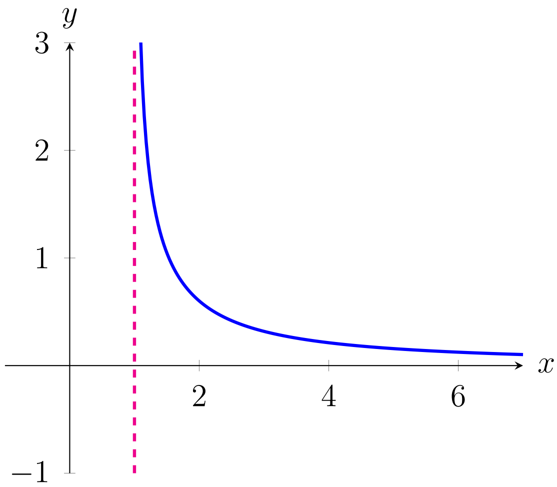
ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحقَّقة (انظر الشكل 46.4). كما أنَّ:

$$\int_{2}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx.$$

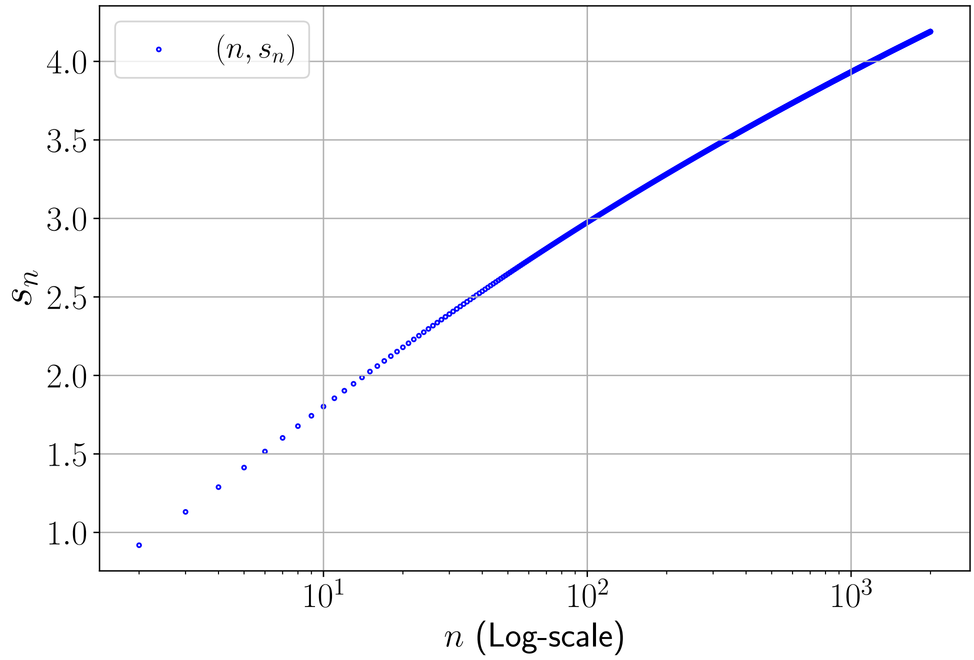
لنأخذ التحويل: $\ln(x) = t$، ومنه: $\frac{dx}{x} = dt$. وبالتَّالي:

$$\begin{aligned}\int_{2}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} t^{-1/2}dt = \lim_{b\to\infty} \left[2\sqrt{t}\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} &= \lim_{b\to\infty} 2\left(\sqrt{\ln(b)} - \sqrt{\ln(2)}\right) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ التَّكامُل $\int_2^\infty f(x)dx$ مُتباعِد. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي (انظر الشكل 47.4).



شكل 46.4: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ ضمن المجال $]1, \infty[$.



شكل 47.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2, 3, \dots, 2000\}$، و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{\ln(k)}}$.

من الشكل 47.4 نلاحظ أنَّ المُتتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 2}$ تَتَبَاعَد إلى اللانهاية بشكل بطيء جدًا، إذ إنَّ:

$$s_{10^4} \approx 4.745647398, \ s_{10^5} \approx 5.462034304, \ s_{10^6} \approx 6.10973424, \ s_{10^7} \approx 6.70535913.$$

التمرين 43

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة ذات حدود غير سالبة، حيث:

$$a_n = \frac{1}{n\ln^2(n)} > 0, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

لنأخذ الدَّالَّة:

$$f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+; \qquad f(x) = \frac{1}{x\ln^2(x)}.$$

إنَّ الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[2, +\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = -\frac{2\ln(x) + \ln^2(x)}{\left(x\ln^2(x)\right)^2} < 0, \qquad \forall x \in [2, +\infty[.$$

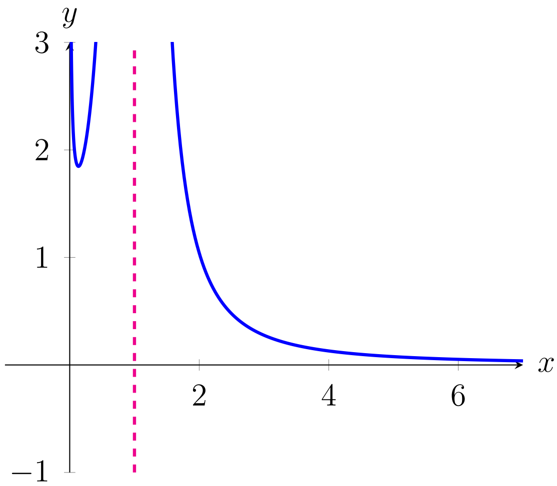
ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحقَّقة (انظر الشكل 48.4). كما أنَّ:

$$\int_2^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^2(x)}dx.$$

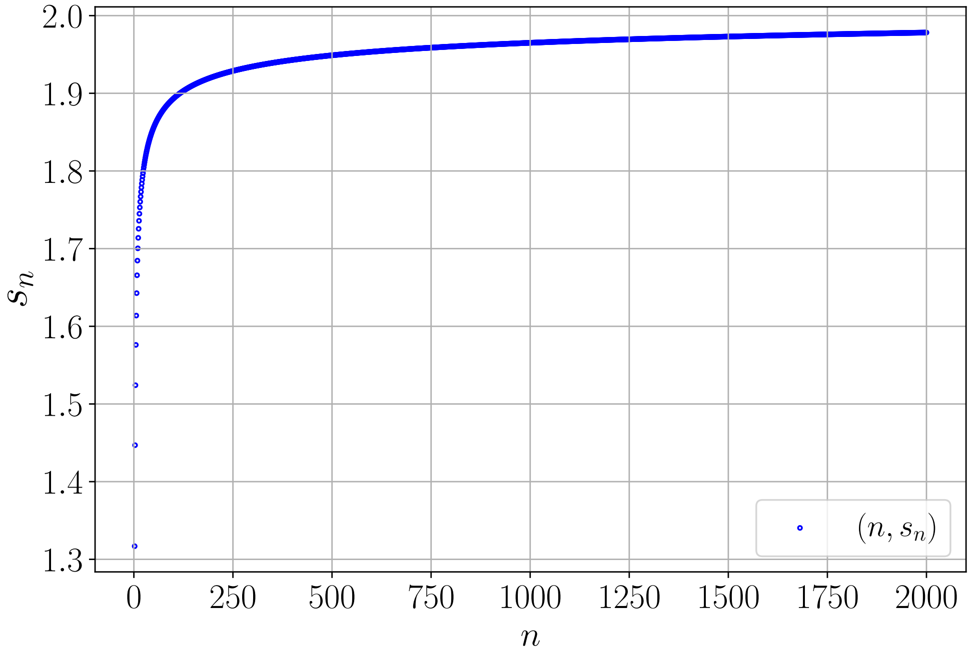
لنأخذ التحويل: $\ln(x)=t$، ومنه: $\frac{dx}{x}=dt$. وبالتَّالي:

$$\begin{aligned}\int_2^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln(2)}^{\ln(b)} t^{-2}dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln(b)}+\frac{1}{\ln(2)}\right)\\ &= \frac{1}{\ln(2)}.\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ التَّكامُل $\int_2^\infty f(x)dx$ مُتقَارِب. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي (انظر الشكل 49.4).



شكل 48.4: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x)=\frac{1}{x\ln^2(x)}$ ضمن المجال $]0,1[\cup]1,\infty[$. قيم هذه الدَّالَّة في جوار العددين 0 و 1 كبيرة جدًا، إذ إنَّها تسعى في جوارهما إلى $+\infty$ بسرعة كبيرة جدًا.



شكل 49.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2, 3 \ldots, 2000\}$، و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k \ln^2(k)}$، في هذا الشكل لدينا: $s_{2000} \approx 1.978192452$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ مجموع المُتَسَلسِلَة في التمرين 43 يساوي تقريبًا 2، إذ إنَّ: $s_{10^8} \approx 2.055455991$

التمرين 44

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \cdot \ln(\ln(n))}.$$

الحل: المُتَسَلسِلَة المُعطَاة ذات حدود غير سالبة، حيث:

$$a_n = \frac{1}{n \ln(n) \cdot \ln(\ln(n))} > 0, \quad \forall n \geqslant 3.$$

لنأخذ الدَّالَّة:

$$f : [3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+; \quad f(x) = \frac{1}{x \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))}.$$

إنَّ الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[3, +\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = -\frac{1 + (1 + \ln(x)) \ln(\ln(x))}{(x \ln(x) \cdot \ln(\ln(x)))^2} < 0, \quad \forall x \in [3, +\infty[.$$

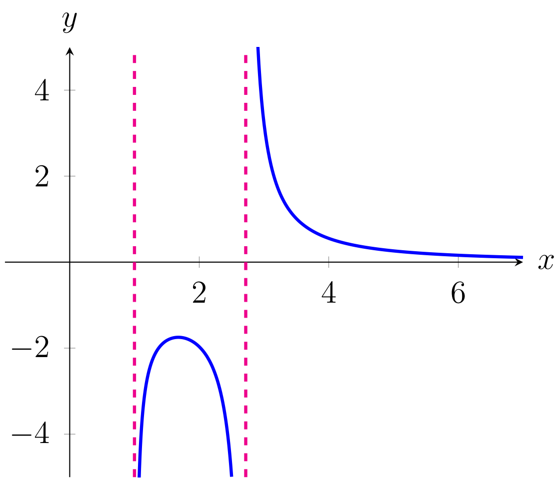
ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحقَّقة (انظر الشكل 50.4). كما أنَّ:

$$\int_3^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^{b} \frac{1}{x\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}dx.$$

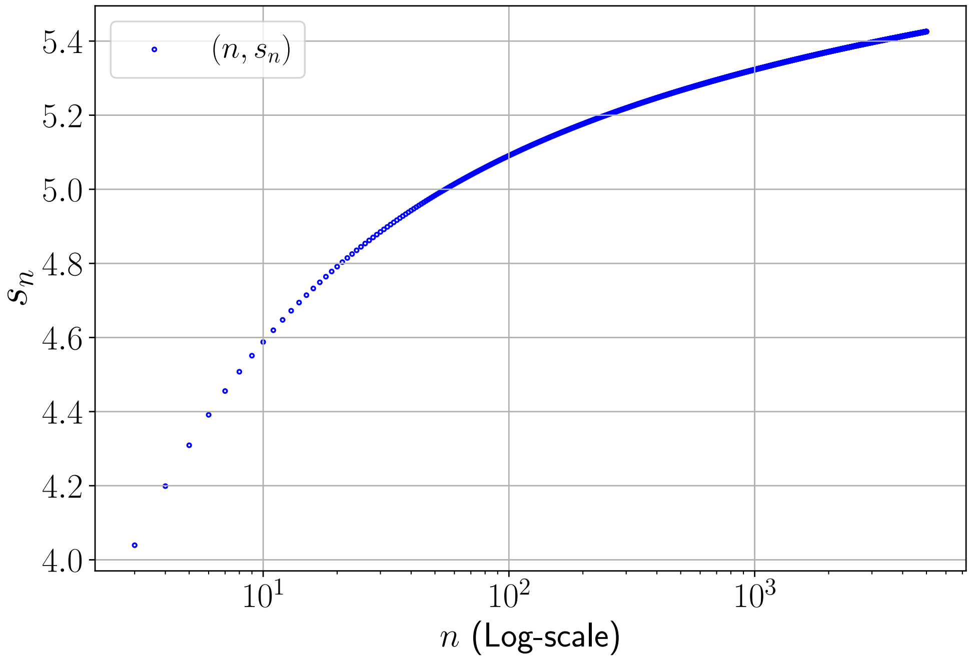
لنأخذ التحويل: $\ln(\ln(x)) = t$، ومنه: $\frac{dx}{x\ln(x)} = dt$. وبالتَّالي:

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln(\ln(3))}^{\ln(\ln(b))} \frac{dt}{t} &= \lim_{b\to\infty}\left[\ln(t)\right]_{\ln(\ln(3))}^{\ln(\ln(b))}\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\ln\left(\ln(\ln(b))\right) - \ln\left(\ln(\ln(3))\right)\right) = \infty.\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ التَّكامُل $\int_3^{\infty} f(x)dx$ مُتباعِد. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي (انظر الشكل 51.4).



شكل 50.4: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))}$ ضمن $]1,e[\cup]e,\infty[$.



شكل 51.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{3, 4, \ldots, 5000\}$، و $s_n = \sum\limits_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k\ln(k)\cdot\ln(\ln(k))}$.

من الشكل 51.4 نلاحظ أنَّ المُتتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 3}$ تَتبَاعَد إلى اللانهاية بشكل بطيء جداً، إذ إنَّ:

$$s_{10^4} \approx 5.461545405, \; s_{10^5} \approx 5.557298982, \; s_{10^6} \approx 5.629261388, \; s_{10^7} \approx 5.68630907.$$

ملاحظة 20:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلاَت الآتية:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\cdot(\ln(\ln(n)))^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{e^{\sqrt{n}}},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(5n)}{7n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{\frac{1}{n^2}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{n^3}.$$

التمرين 45

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}.$$

الحل: إنَّ:

$$\sqrt[n]{3} < 3, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

ومنه:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{3}} > \frac{1}{3}, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

وبما أنَّ المُتَسَلسِلَة $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3}$ مُتَبَاعِدَة فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الأول.

التمرين 46

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

الحل: إنَّ:

$$\ln(n) > 1, \qquad \forall n \geqslant 3.$$

ومنه:

$$\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geqslant 3.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة) فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الأول.

طريقة ثانية: بوضع: $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$، و $b_n = \frac{1}{n}$، نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني.

التمرين 47

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}.$$

الحل: إنَّ:

$$\ln(n) < n, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

ومنه:

$$\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة) فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الأول.

التمرين 48

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^{2n-1}}.$$

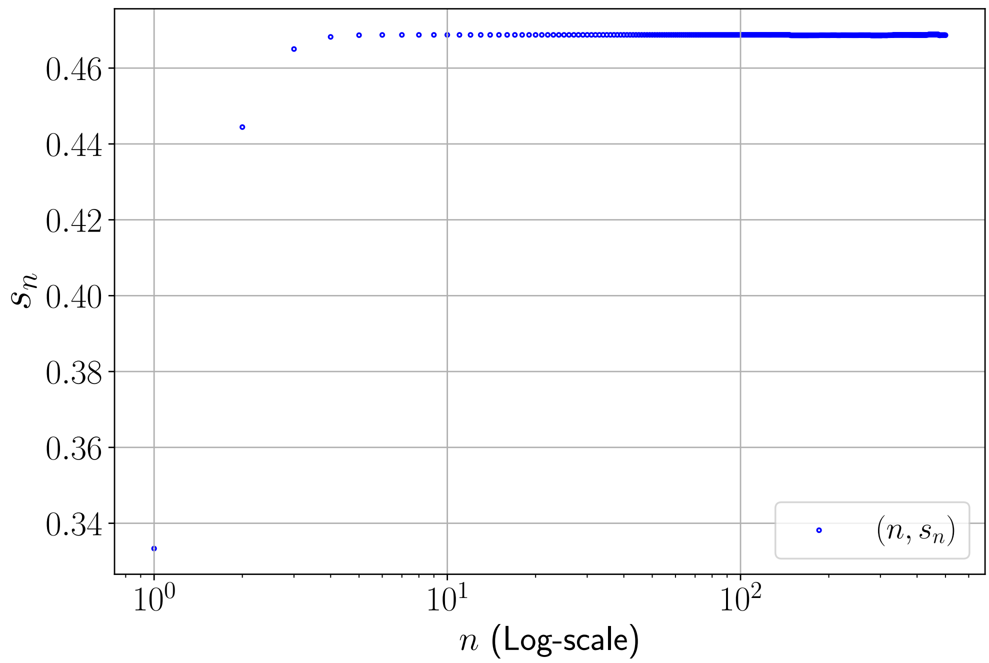
الحل: إنَّ:

$$\frac{2n-1}{3^{2n-1}} < \frac{2n}{3^{2n-1}} = \frac{6n}{3^{2n}} < \frac{n}{9^n}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

من أجل المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{9^n}$، لنطبق اختبار كُوشِي.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{9} = \frac{1}{9} < 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{9^n}$ مُتقارِبة، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 52.4).



شكل 52.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 500\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{3^{2k-1}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{500} \approx 0.46866957$. ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^{2n-1}} \approx 0.5$.

التمرين 49

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n+3^n}.$$

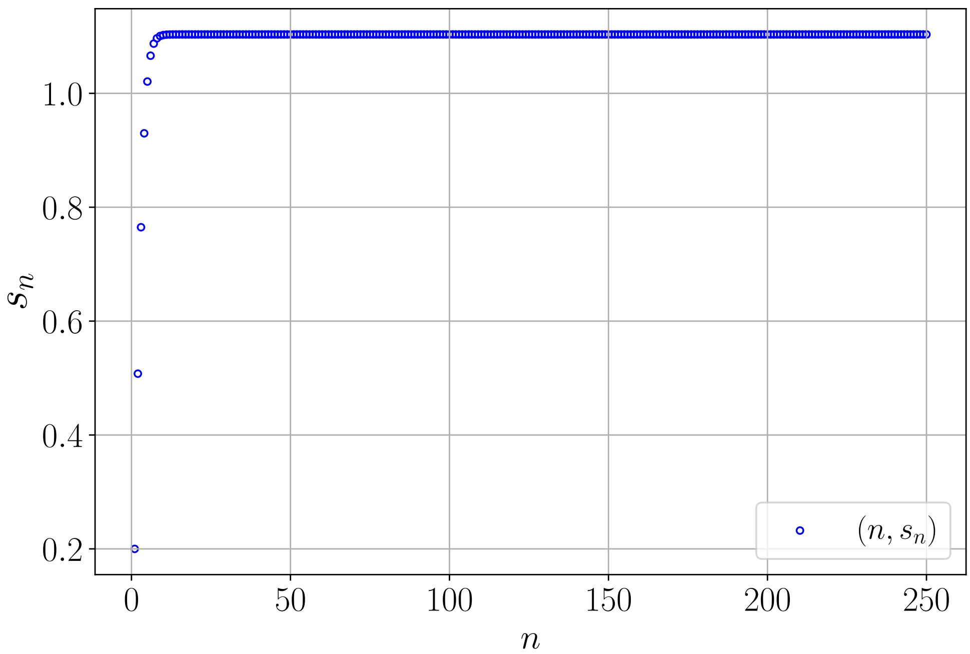
الحل: إنَّ:

$$\frac{n^2}{2^n+3^n} < \frac{n^2}{2^n}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

من أجل المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$، لنطبق اختبار كُوشِي.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ مُتقَارِبَة، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقَارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 53،4).



شكل 53،4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 250\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k+3^k}$. في هذا الشكل لدينا $s_{250} \approx 1.10343564$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n+3^n} \approx 1.1$.

التمرين 50

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5}{4^n+n^8}.$$

الحل: إنَّ:

$$\frac{3^n+5}{4^n+n^8} < \frac{3^n+5}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n + 5\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

لكن المُتَسَلْسِلَة: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 5\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ مُتَقارِبَة، لأنَّ كل من $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ مُتَقارِبَة (كل منهما مُتَسَلْسِلَة هَندسِيَّة أساسها أصغر من الواحد). ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الأول.

التمرين 51

$$\sum_{n=2022}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}.$$

الحل: إنَّ:

$$(\ln(n))^{\ln(n)} = \left(e^{\ln(\ln(n))}\right)^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln(\ln(n))} = \left(e^{\ln(n)}\right)^{\ln(\ln(n))} = n^{\ln(\ln(n))}.$$

ومنه:

$$\sum_{n=2022}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = \sum_{n=2022}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}.$$

لكن:

$$\frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \geqslant 2022.$$

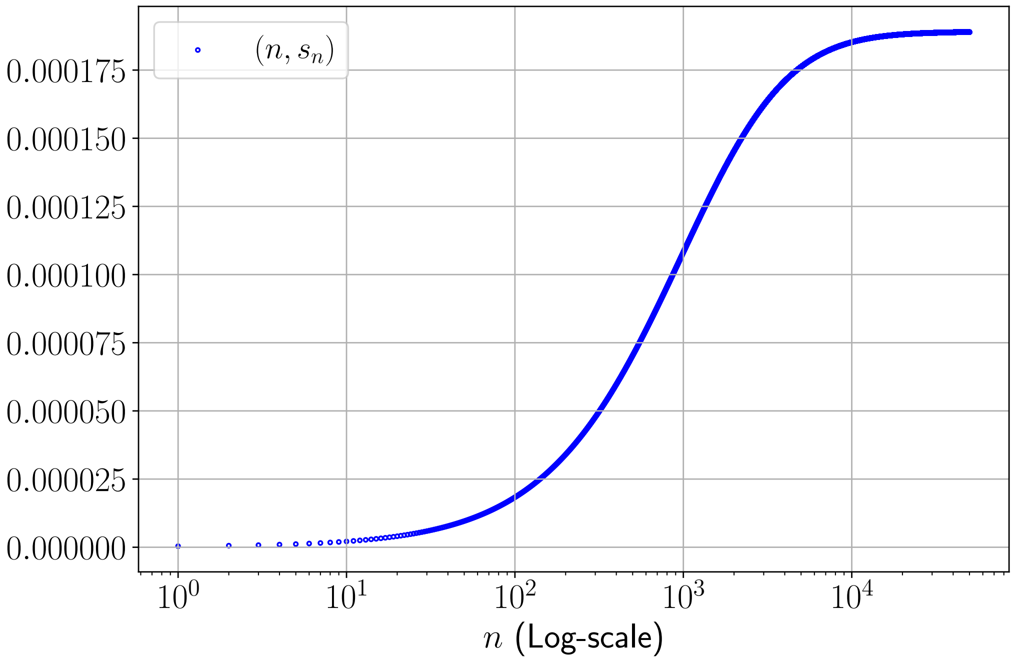
وللتَّحقُّقِ من هذه المُتَرَاجِحَة نكتب:

$$\begin{aligned}
& n^2 \overset{?}{\leqslant} n^{\ln(\ln(n))}, && \forall n \geqslant 2022,\\
\Longrightarrow\ & 2 \overset{?}{\leqslant} \ln(\ln(n)), && \forall n \geqslant 2022,\\
\Longrightarrow\ & e^2 \overset{?}{\leqslant} \ln(n), && \forall n \geqslant 2022,\\
\Longrightarrow\ & e^{e^2} \overset{?}{\leqslant} n, && \forall n \geqslant 2022.
\end{aligned}$$

لكن: $e^{e^2} \approx 1618.178$. ومنه فالمُتَرَاجِحَة $\frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}} \leqslant \frac{1}{n^2}$ صحيحة مهما يكن $n \geqslant 2022$. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=2022}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ مُتَقارِبَة (مُتَسَلْسِلَةُ رِيمَان، حيث $p = 2 > 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 54.4).

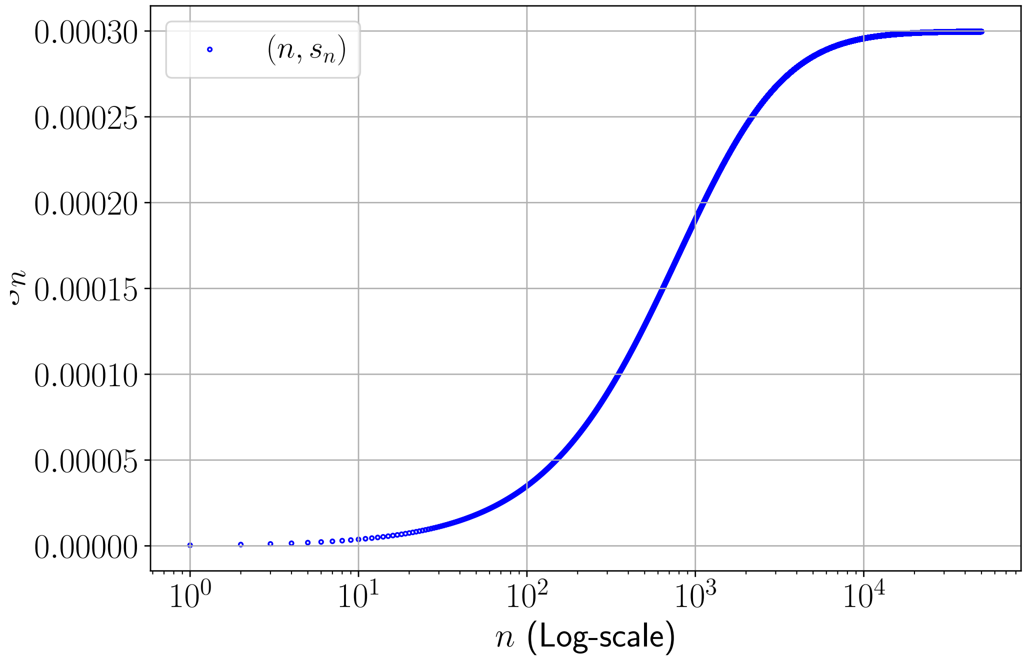
إن المُتَرَاجِحَة $\frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}} \leqslant \frac{1}{n^2}$ صحيحة مهما يكن $n \geqslant 1619$. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة بدءًا من الحد الذي ترتيبه 1619 (انظر الشكل 55.4). وبما أن حذف أو إضافة عدد منته من حدود مُتَسَلْسِلَة

عددية لا يؤثر على طبيعتها، من حيث التَّقارُب أو التَّباعُد، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ مُتَقارِبَة (انظر الشكل 56.4).

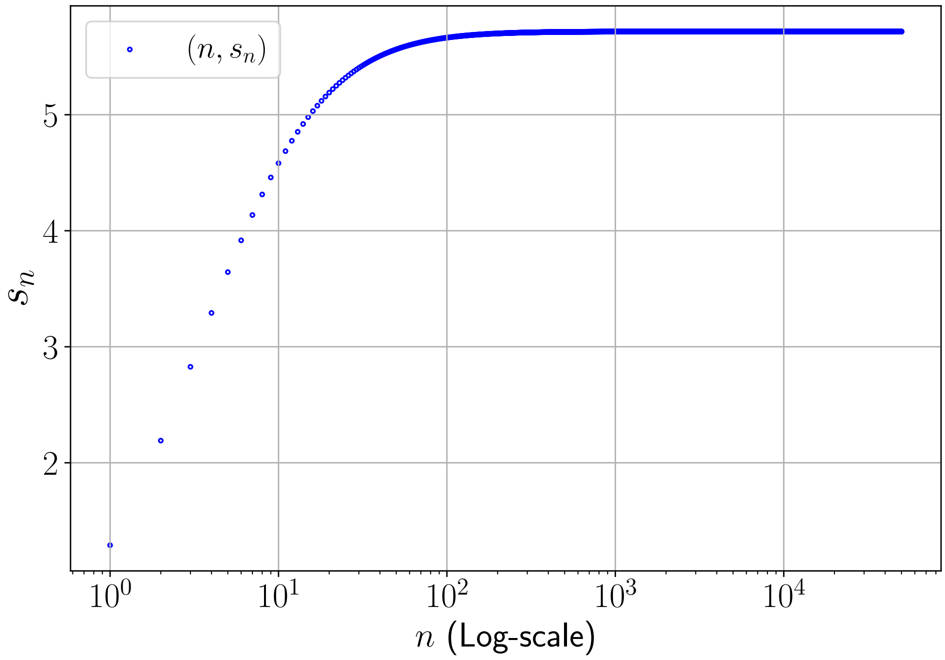


شكل 54.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 50000\}$ و $s_n = \sum_{k=2022}^{n+2021} \frac{1}{(\ln(k))^{\ln(k)}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{50000} \approx 0.000188922$. ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=2022}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} \approx 0.0002$.

لاحظ من الشكل 56.4 التقارب البطيء جداً للمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$.



شكل 55.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 50000\}$ و $s_n = \sum_{k=1619}^{n+1618} \frac{1}{(\ln(k))^{\ln(k)}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{50000} \approx 0.000299684$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1619}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} \approx 0.0003$.



شكل 56.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 50000\}$ و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(\ln(k))^{\ln(k)}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{50000} \approx 5.71697$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} \approx 5.7$.

التمرين 52

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln(\sqrt{n})}.$$

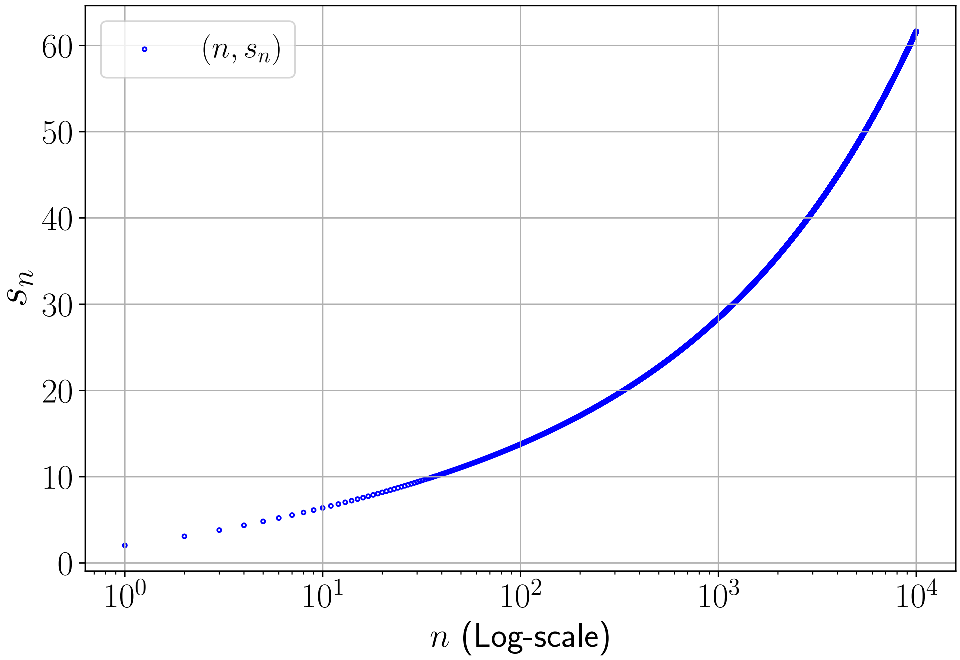
الحل: إنَّ:

$$\ln(\sqrt{n}) < \sqrt{n}, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

ومنه:

$$\frac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln(\sqrt{n})} > \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقَارَنة الأول (انظر الشكل 57.4).



شكل 57.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2, 3, \dots, 10000\}$ و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \ln(\sqrt{k})}$.

التمرين 53

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

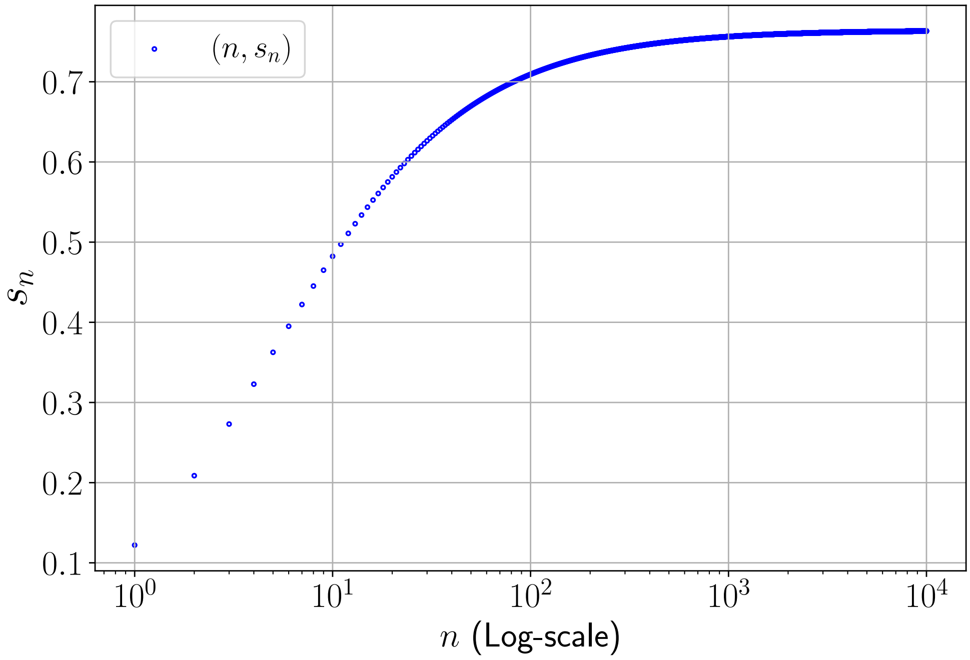
الحل: إنَّ:

$$\ln(n) < \sqrt{n}, \quad \forall n \geqslant 3.$$

ومنه:

$$\frac{\ln(n)}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall n \geqslant 3.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ مُتَقَارِبَة (مُتَسَلْسِلَةُ رِيمَانْ، حيث $p = \frac{3}{2} > 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقَارِبَة حسب اختبار المُقَارَنة الأول (انظر الشكل 58.4).



شكل 58.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{3, 4, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=3}^{n+2} \frac{\ln(k)}{k^2}$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.76324$. ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \approx 0.76$.

التمرين 54

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(e^n - 1)}.$$

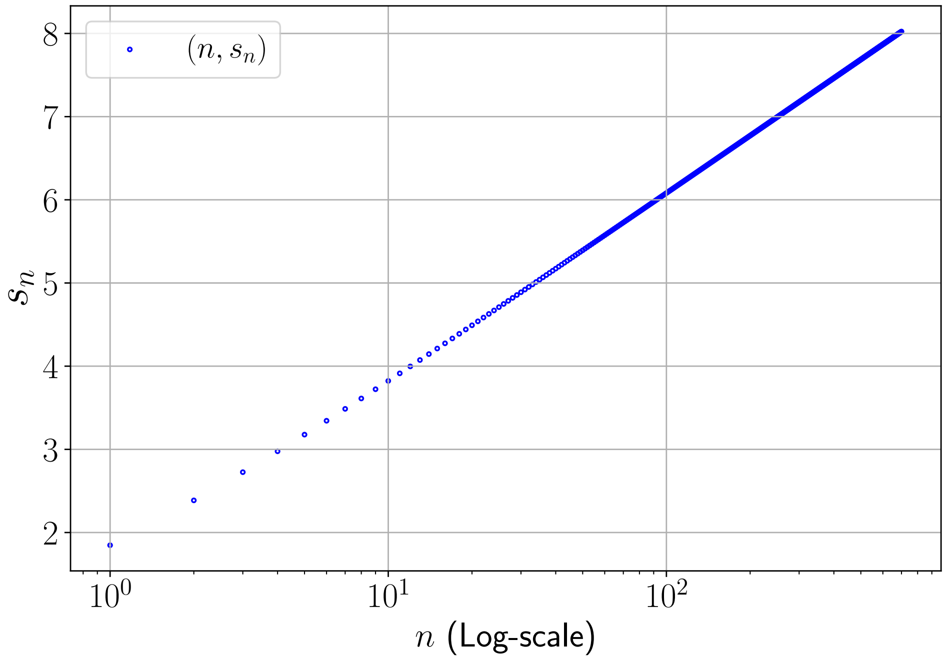
الحل: إنَّ:

$$e^n - 1 < e^n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

ومنه:

$$\ln(e^n - 1) < \ln(e^n) = n \implies \frac{1}{\ln(e^n - 1)} > \frac{1}{n}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 59.4).



شكل 59.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 700\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(e^k - 1)}$.

التمرين 55

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{7}{4} + \ldots$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}.$$

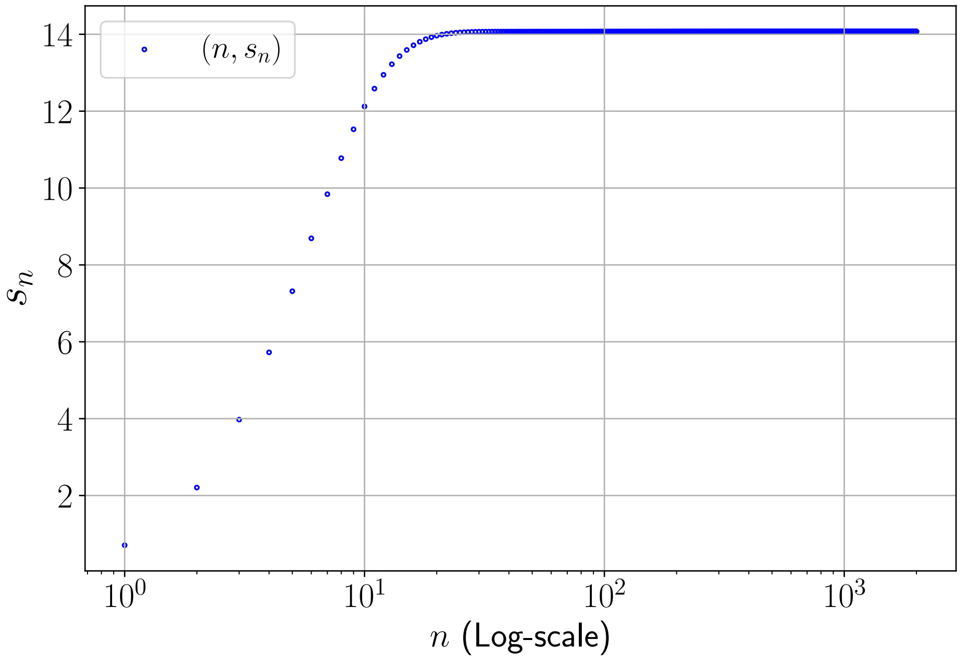
إنَّ:

$$\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} < \frac{2n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}, \qquad \forall n \geqslant 3.$$

لدراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$، نطبق اختبار كُوشِي، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$ مُتقَارِبَة. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقَارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 60.4).



شكل 60.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 2000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{(\sqrt{2})^k}$. في هذا الشكل لدينا $s_{2000} \approx 14.0710678$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \approx 14.1$.

التمرين 56

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt[3]{n}}.$$

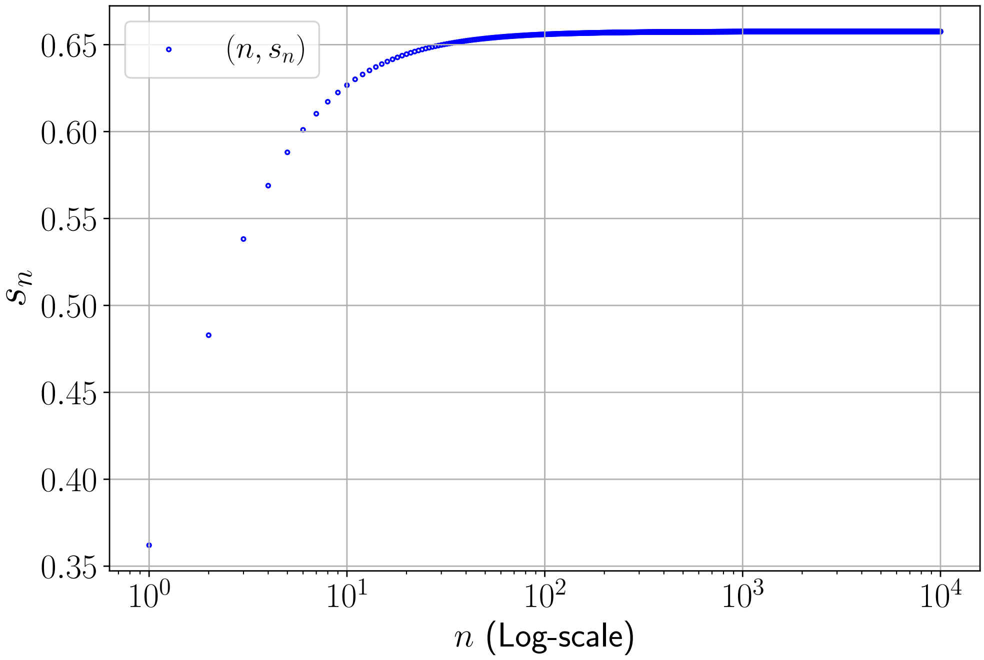
الحل: إنَّ:

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt[3]{n}} \leqslant \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right), \qquad \forall n \geqslant 1.$$

من أجل المُتَسَلْسِلَة: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$. بوضع: $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$، و $b_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
نجد أنَّ:

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

كما أنَّ: $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، تِلسْكُوبِيَّة مُتَقارِبَة. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 61.4).



شكل 61.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{1}{k}) - \sin(\frac{1}{k+1})}{\sqrt[3]{k}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.657533478$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n+1})}{\sqrt[3]{n}} \approx 0.66$.

ملاحظة 21:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{10}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(2)}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln(n)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n + 5^n}.$$

التمرين 57

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{3}{10} + \dots$$

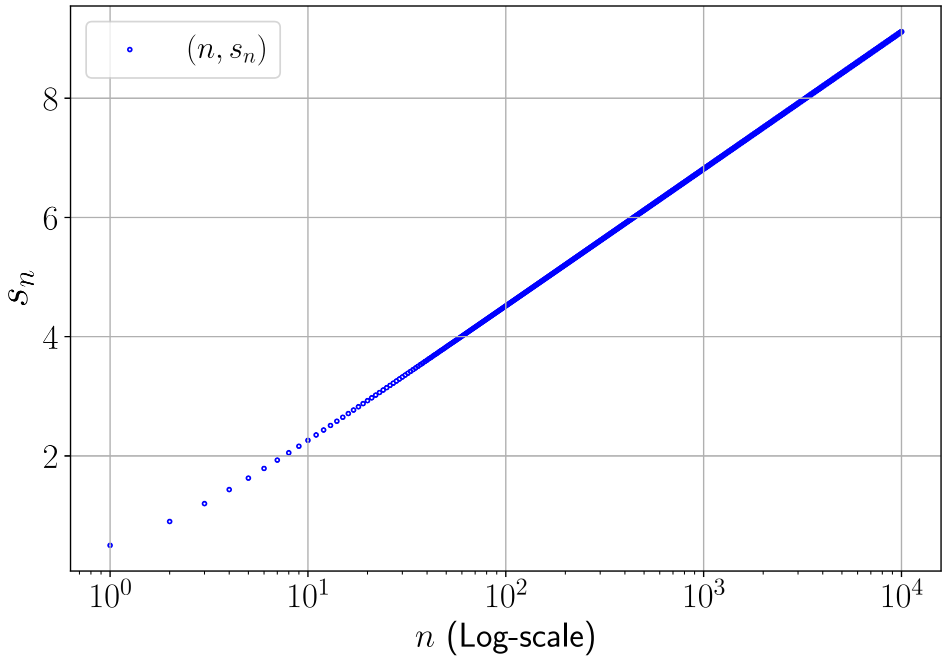
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

لنضع: $a_n = \frac{n}{n^2+1}$، و $b_n = \frac{1}{n}$. (لاحظ أنَّ الفرق بين دَرَجتي البسط والمقام يساوي 1). فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَتَان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَبَاعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 62.4).



شكل 62.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1}$.

التمرين 58

$\frac{3}{2^2.3^2} + \frac{5}{3^2.4^2} + \frac{7}{4^2.5^2} + \ldots$

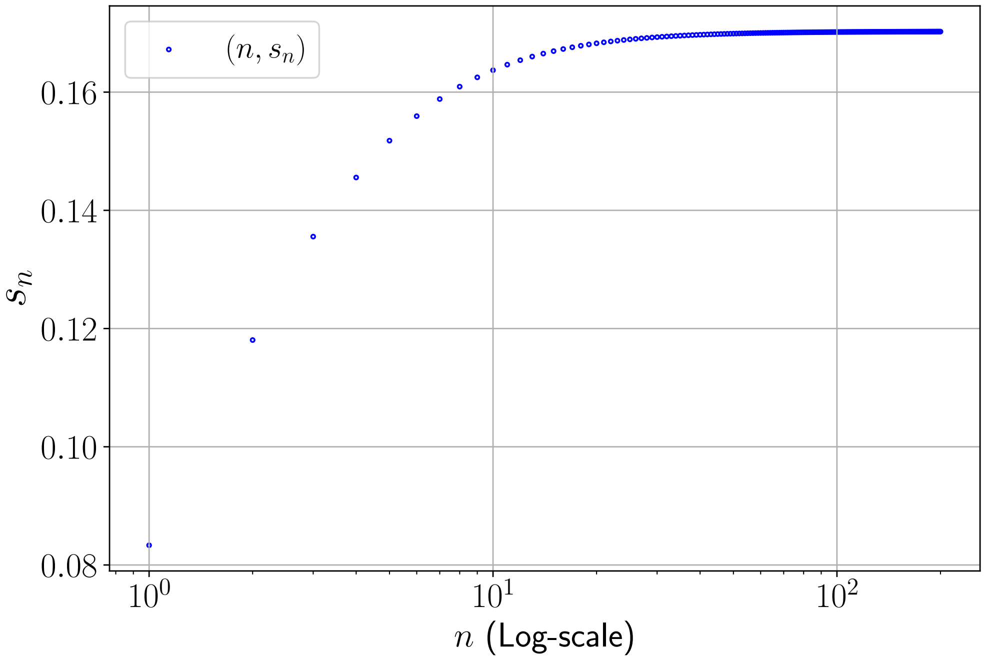
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}.$$

لنضع: $a_n = \frac{3n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$، و $b_n = \frac{1}{n^3}$. (لاحظ أنَّ الفرق بين دَرَجتي البسط والمقام يساوي 3). فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+n^3}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1.$$

ومنه فالمُتَسلسِلتَان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ مُتَقارِبَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ، حيث $p = 3 > 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 63.4).



شكل 63.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 200\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}$. في هذا الشكل لدينا $s_{200} \approx 0.1702393$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(n+1)^2(n+2)^2} \approx 0.17$.

التمرين 59

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$، و $b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$. (لاحظ أنَّ الفرق بين دَرَجتَي البسط والمقام يساوي $\frac{7}{6}$). فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{7}{6}}}{n^{\frac{3}{2}} + n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{\frac{3}{2}}}}{\cancel{n^{\frac{3}{2}}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1.$$

ومنه فالمُتَسلسِلتَان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ مُتَقارِبَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ، حيث $p = \frac{7}{6} > 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني.

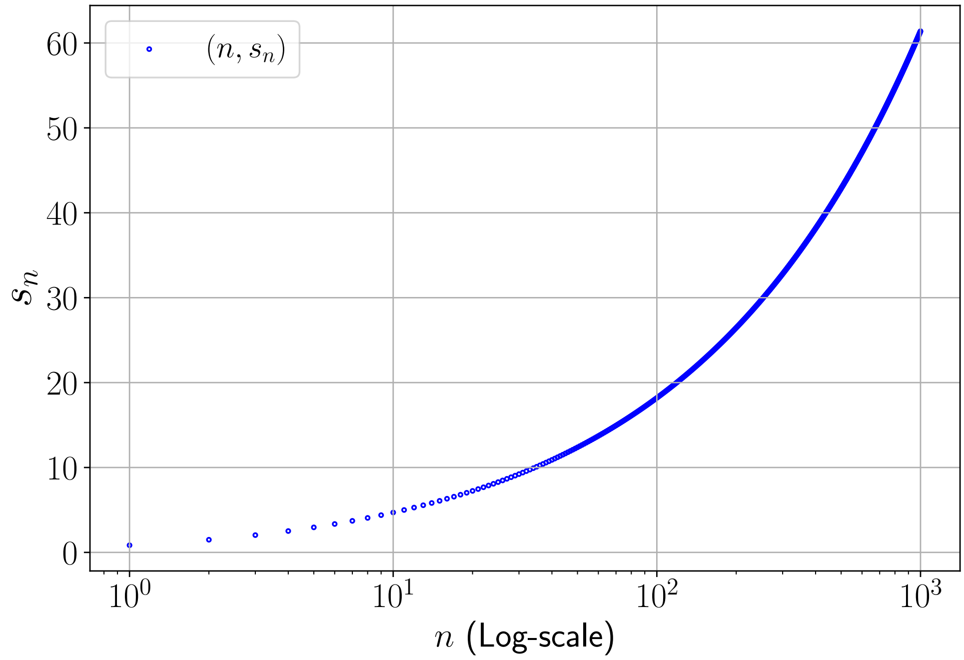
التمرين 60

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$، و $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَتَان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ مُتَباعِدَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ، حيث $p = \frac{1}{2} < 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 64.4).



شكل 64.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

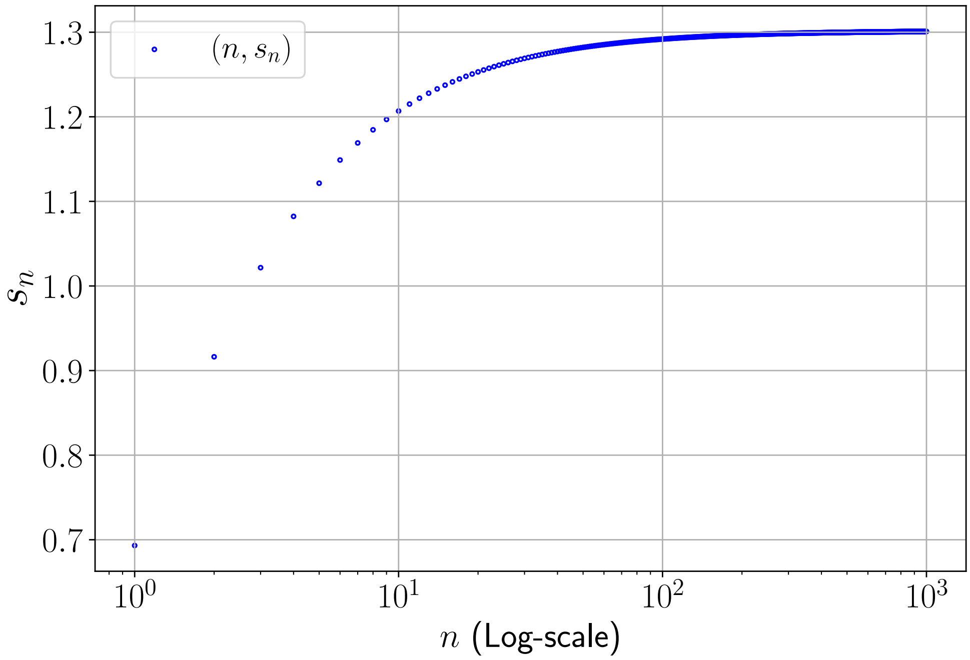
التمرين 61

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$، و $b_n = \frac{1}{n^2}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلتَانِ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ مُتَقارِبَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ، حيث $p = 2 > 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 65.4).



شكل 65.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 1.3008$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \approx 1.3$.

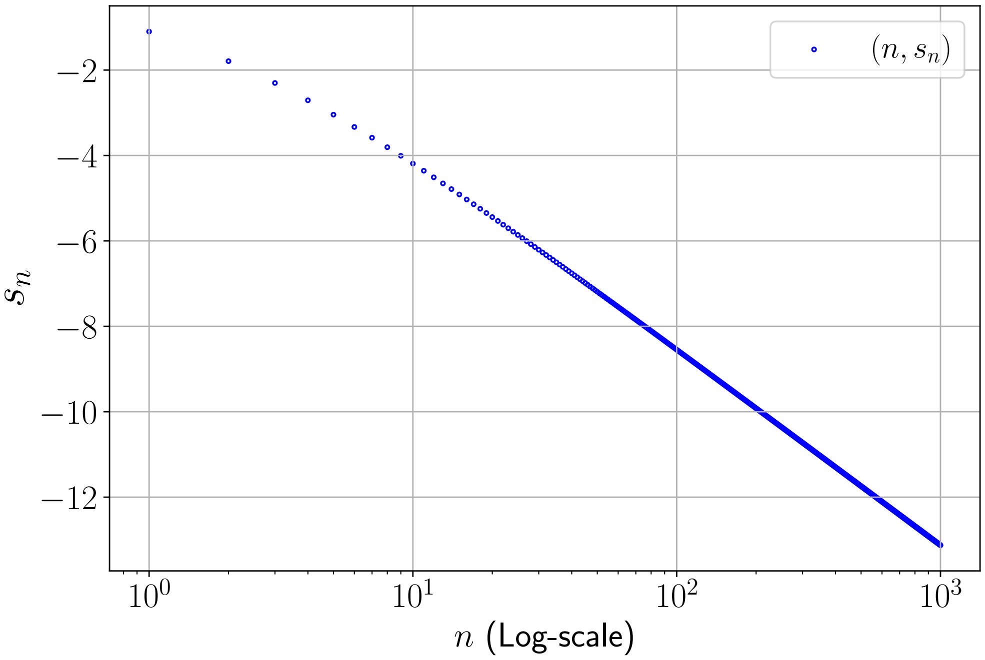
التمرين 62

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n = \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)$، و $b_n = \frac{-2}{n+2}$. فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)}{\frac{-2}{n+2}} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلتَانِ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n+2}$ مُتباعِدَة فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 66.4).



شكل 66.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+2}\right)$.

التمرين 63

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{1}{2^n - n}$، و $b_n = \frac{1}{2^n}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}}.$$

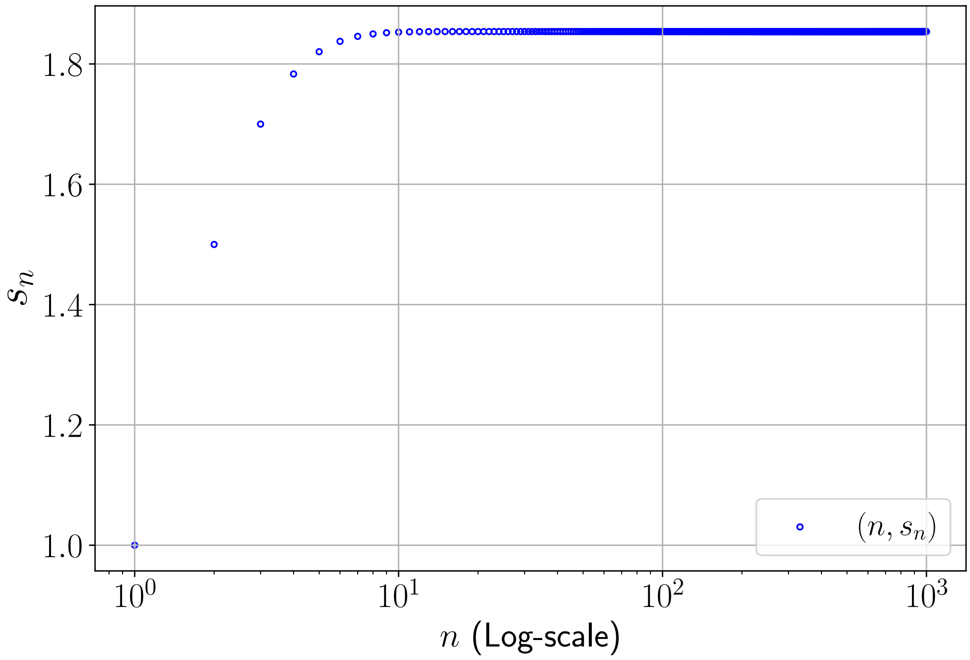
لحساب النهاية: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$، نضع: $c_n = \frac{n}{2^n}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

ومنه فإنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$، وبالتَّالي:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلتَانِ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ مُتَقارِبَة (هَندسيَّة أساسها $q = \frac{1}{2} < 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 67.4).



شكل 67.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k - k}$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 1.8538629$. ومنه يمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} \approx 1.85$.

التمرين 64

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots$$

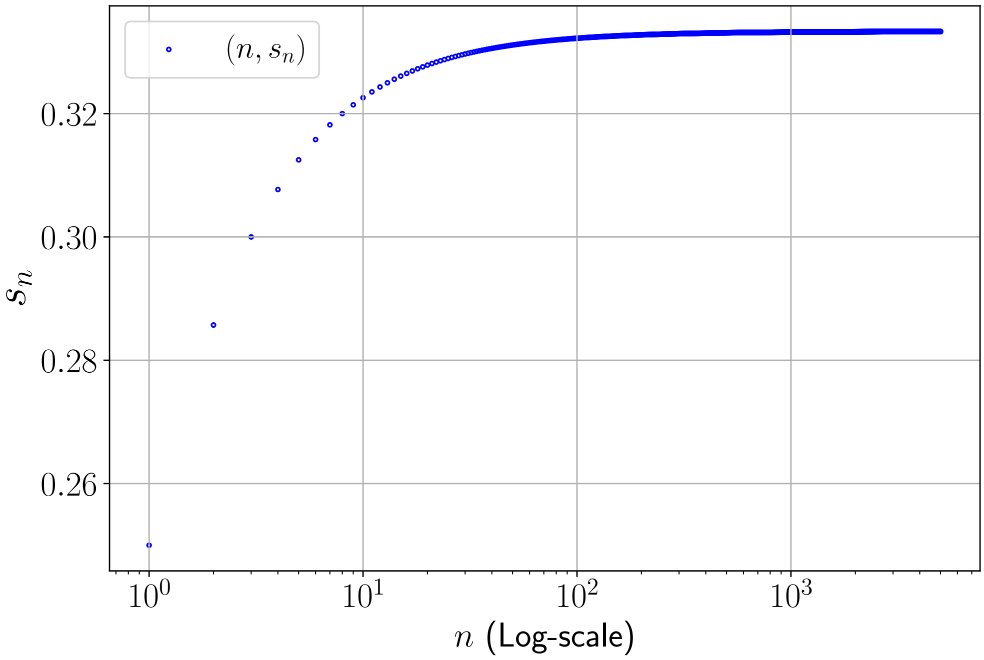
الحل: المُتَسَلسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}.$$

لنضع: $a_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$، و $b_n = \frac{1}{n^2}$. (لاحظ أنَّ الفرق بين دَرَجتَي البسط والمقام يساوي 2).
فنجد:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{9}.$$

ومنه فالمُتَسلسِلتَانِ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ مُتَقارِبَة (مُتَسَلسِلَة رِيمَانْ، حيث $p = 2 > 1$)، فإنَّ المُتَسَلسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 68.4).



شكل 68.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{0, 1, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$، في هذا الشكل لدينا $s_{5000} \approx 0.333311$، ومنه يمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \approx 0.33$.

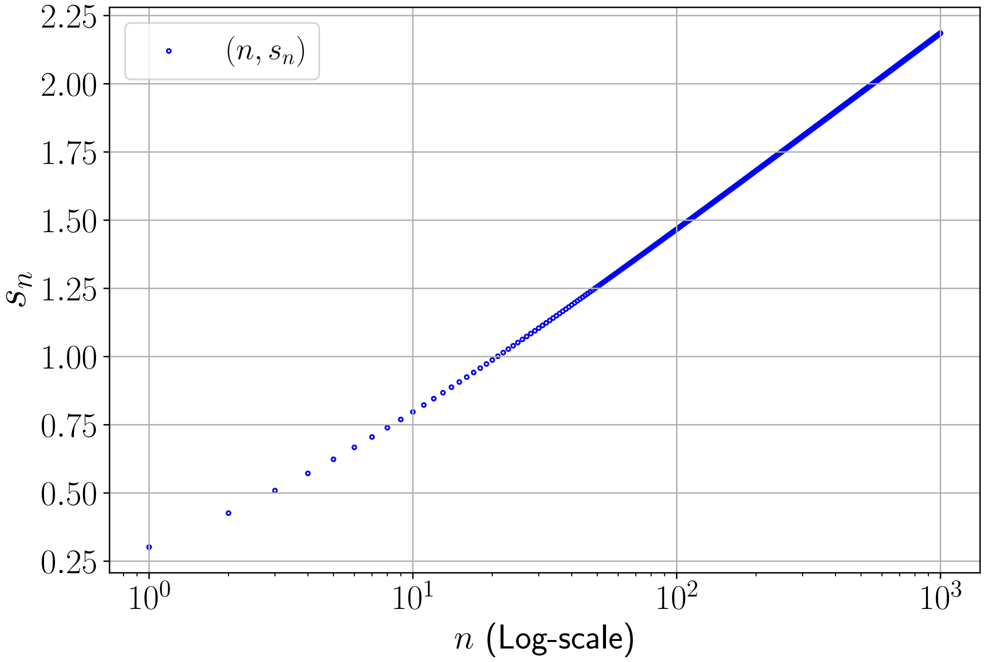
التمرين 65

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-\ln(n)}{10n^3+n^2}}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \sqrt{\frac{n-\ln(n)}{10n^3+n^2}}$، و $b_n = \frac{1}{n}$، فنجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} n \cdot \sqrt{\frac{n-\ln(n)}{10n^3+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2(n-\ln(n))}{10n^3+n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\cancel{n^3}\left(1-\frac{\ln(n)}{n}\right)}{\cancel{n^3}\left(10-\frac{1}{n}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{10}}.
\end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلسِلَتَان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتباعِدَة (المُتَسَلسِلَة التَّوافُقيَّة)، فإنَّ المُتَسَلسِلَة المُعطَاة مُتباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 69.4).



شكل 69.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k-\ln(k)}{10k^3+k^2}}$.

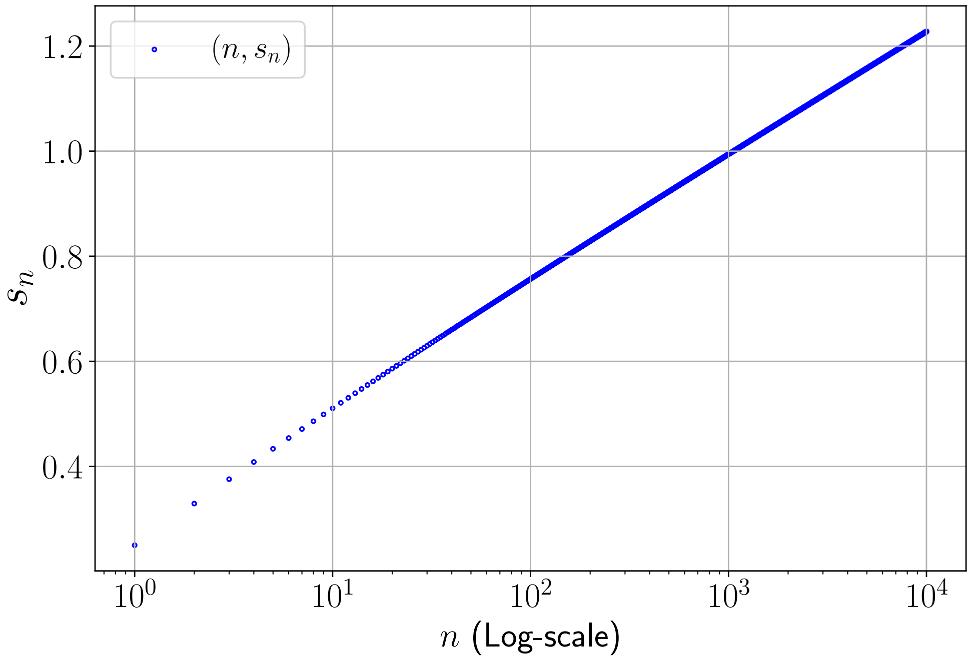
التمرين 66

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$، و $b_n = \frac{1}{n}$. (لاحظ أنَّ الفرق بين دَرَجتي البسط والمقام يساوي 1). فنجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}} \cdot n}{(2n-1)(5n^{\frac{1}{3}}-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}}{10n^{\frac{4}{3}} - 2n - 5n^{\frac{1}{3}} + 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{\frac{4}{3}}}}{\cancel{n^{\frac{4}{3}}}\left(10 - \frac{2}{n^{\frac{1}{3}}} - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)} = \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلسِلتَان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 70.4).



شكل 70.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[3]{k}}{(2k-1)(5\sqrt[3]{k}-1)}$.

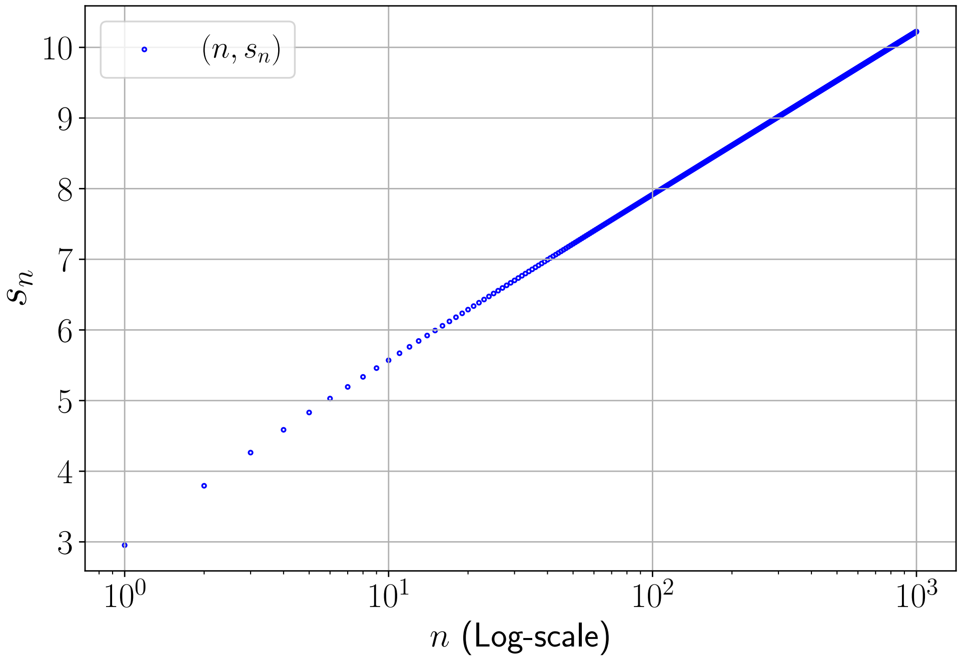
التمرين 67

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2.$$

الحل: لنضع: $a_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$، و $b_n = \frac{1}{n}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right) = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَتَان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتباعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَبَاعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 71.4).



شكل 71،4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right)^2$.

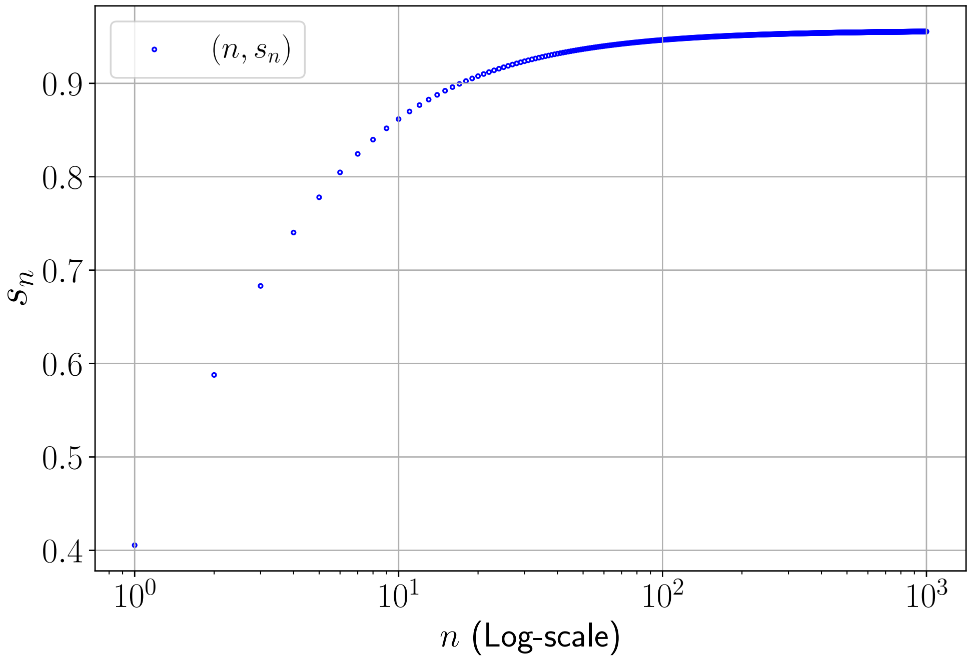
التمرين 68

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n = \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)$، و $b_n = \frac{1}{n^2+1}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^2+1}} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلتَان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ مُتَقارِبة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 72،4).



شكل 72.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k^2+2}{k^2+1}\right)$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 0.955448$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right) \approx 0.95$.

التمرين 69

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}\right).$$

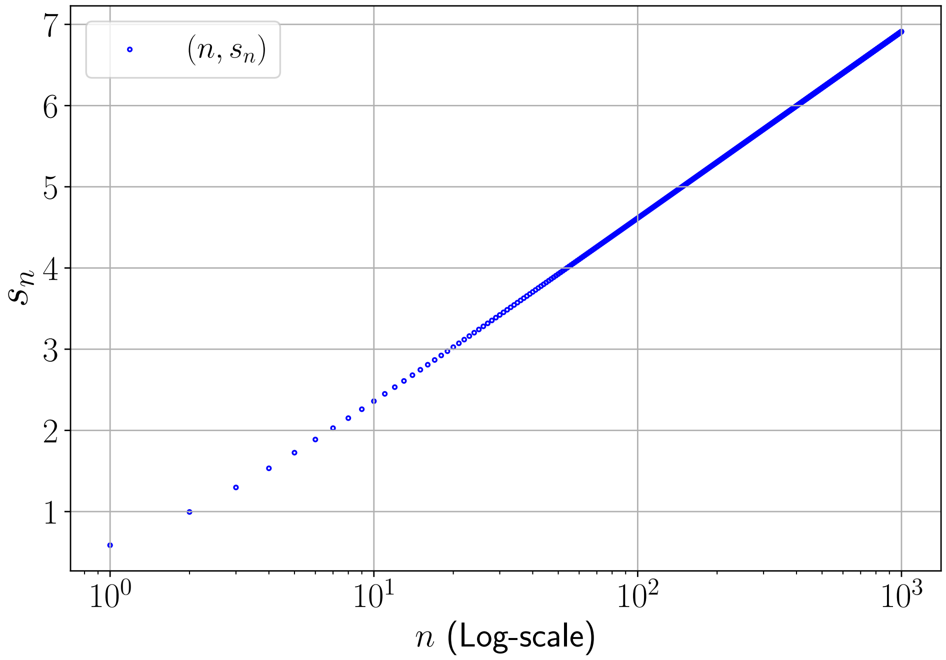
الحل: لنضع:

$$a_n = \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1} = \frac{2}{\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}}$$

و $b_n = \frac{1}{n}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلسِلتَان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلسِلَةَ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتباعِدَة (المُتَسَلسِلَة التَّوافُقيَّة)، فإنَّ المُتَسَلسِلَةَ المُعطَاة مُتباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 73.4).



شكل 73.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k^2+3} - \sqrt{k^2+1}\right)$.

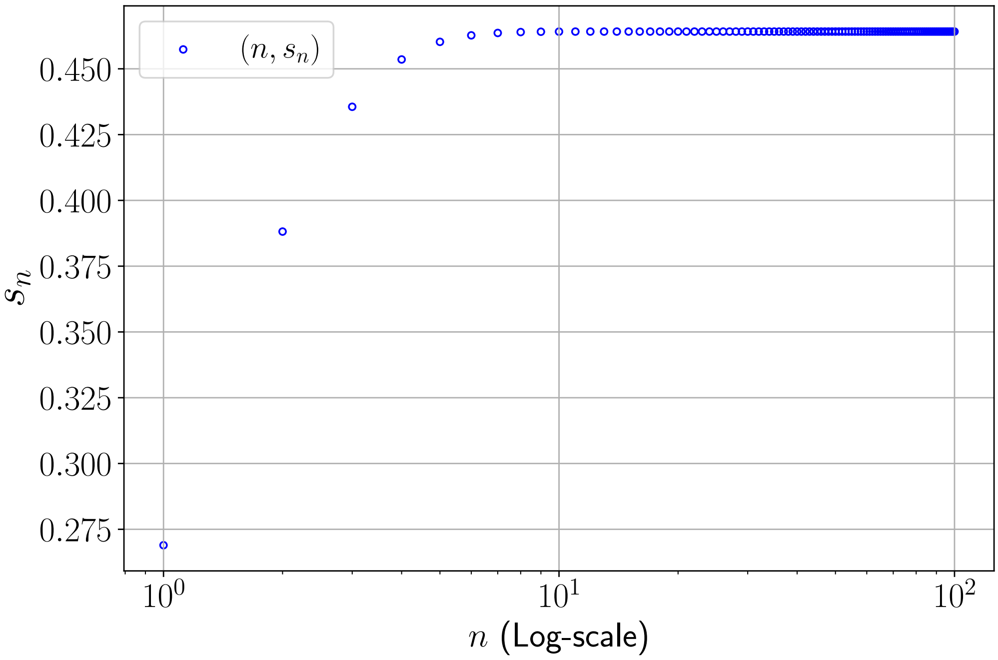
التمرين 70

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n+1}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{1}{e^n+1}$، و $b_n = \frac{1}{e^n}$. فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n+1} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلسِلتَانِ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ مُتَقارِبَة (هَندسِيَّة أساسها $q = \frac{1}{e} < 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 74.4).



شكل 74.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{e^k+1}$، في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 0.4641635$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n+1} \approx 0.46$.

التمرين 71

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

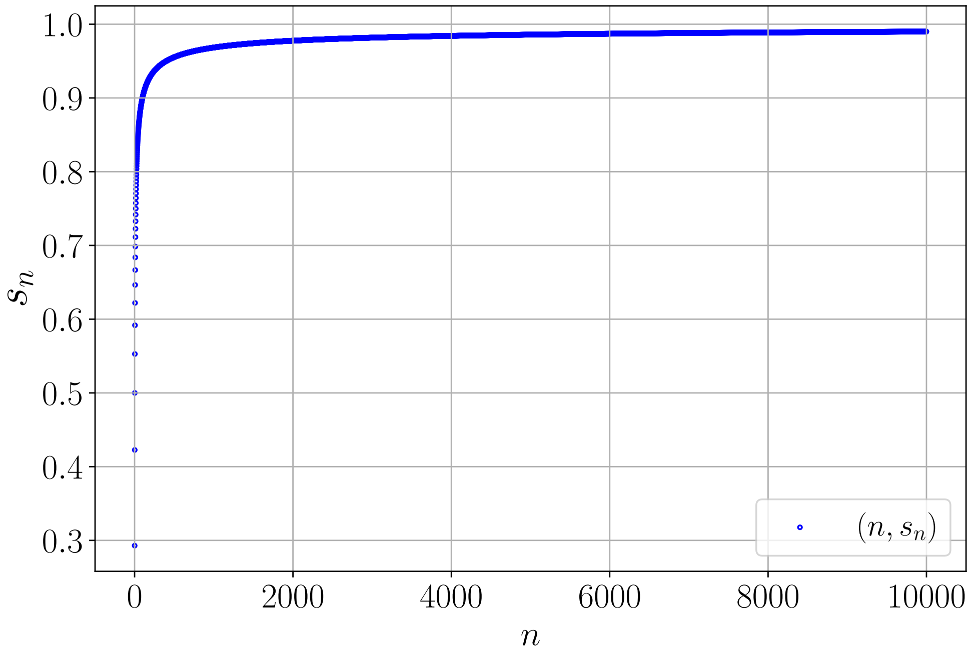
الحل: إنَّ:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^3+2n^2+n} + \sqrt{n^3+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}. \end{aligned}$$

لنأخذ الآن: $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$، عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n^3}}}{\cancel{\sqrt{n^3}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{2}.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلتَان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ مُتَقارِبَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ، حيث $p = \frac{3}{2} > 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 75.4).



شكل 75.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.99$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \approx 0.99$.

التمرين 72

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2^n+1}}.$$

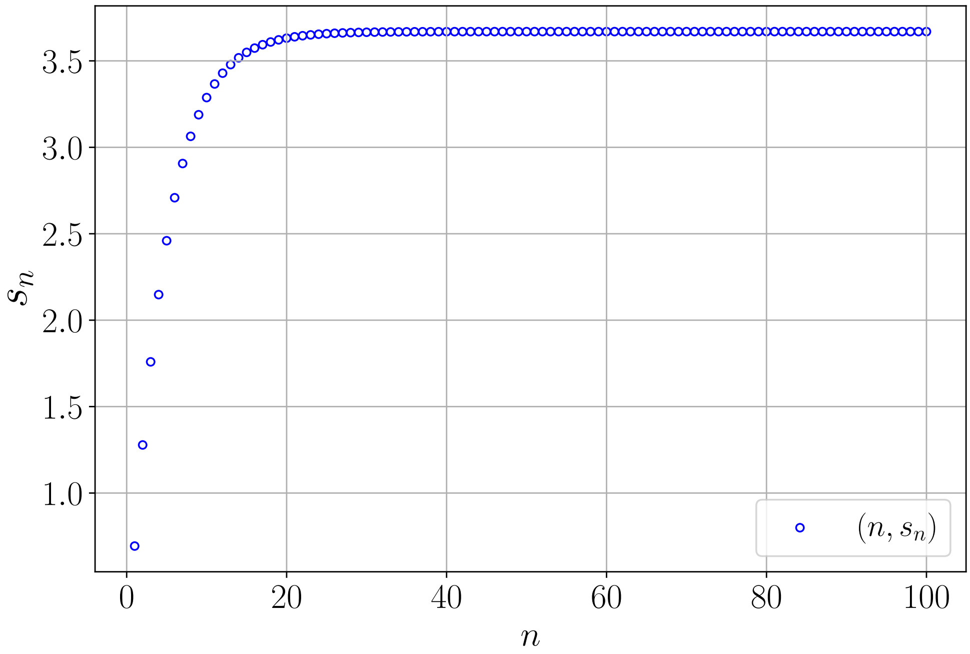
الحل: إنَّ:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2^n+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^n} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^n \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{2^n}}}.$$

لنأخذ: $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\left(\sqrt[3]{2}\right)^n}}{\cancel{\left(\sqrt[3]{2}\right)^n} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{2^n}}} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلسِلتَان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n$ مُتقارِبَة (هَندسيَّة أساسها $q = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 76.4).



شكل 76.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{2^k+1}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 3.66928$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2^n+1}} \approx 3.67$.

التمرين 73

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right).$$

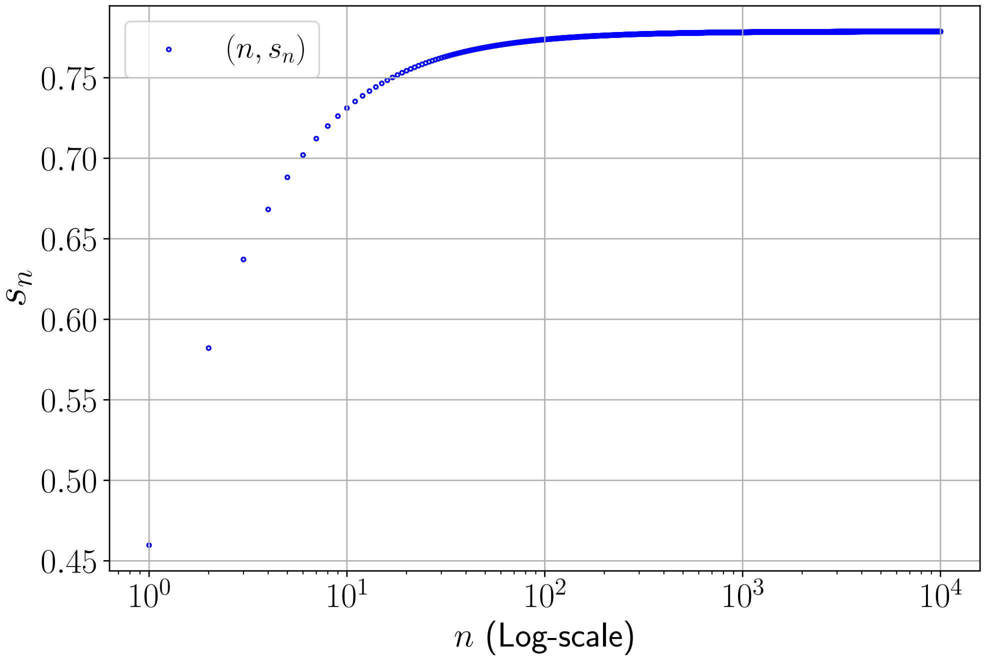
الحل: إنَّ:

$$a_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right).$$

لنأخذ: $b_n = \frac{1}{4n^2}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}\right)^2 = 2.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَتَانِ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ مُتَقَارِبَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 77.4).



شكل 77.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)$، في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.7787$، ومنه يمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \approx 0.78$.

التمرين 74

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

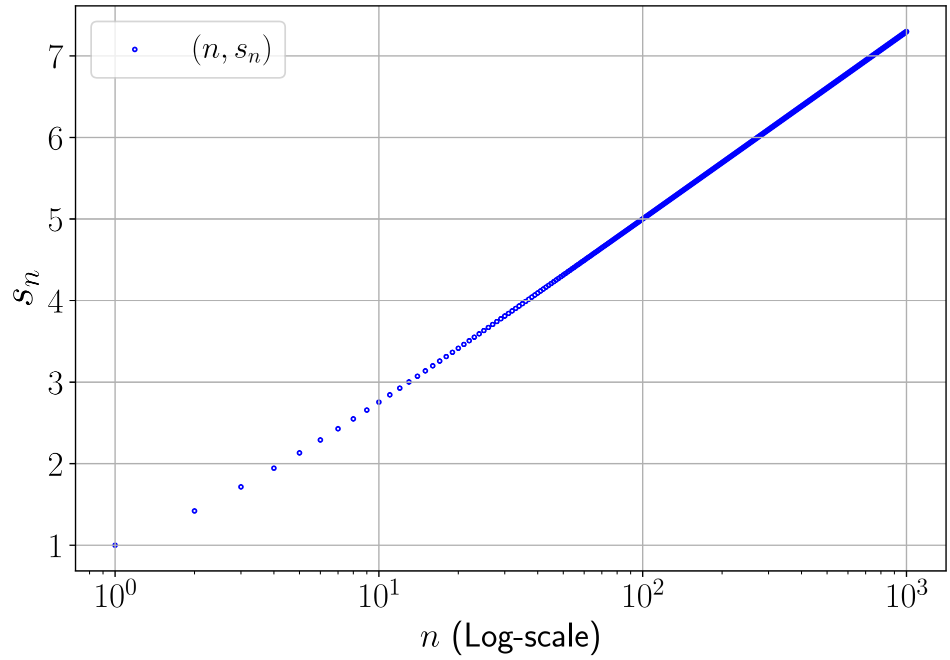
الحل: إنَّ:

$$a_n = \frac{1}{n \cdot n^{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{n \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^{1/n}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}.$$

لكن: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = 1$ ومنه بأخذ: $b_n = \frac{1}{n}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلسِلتَان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة (المُتَسَلسِلَة التَّوافُقيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 78.4).



شكل 78.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k^2}}}$.

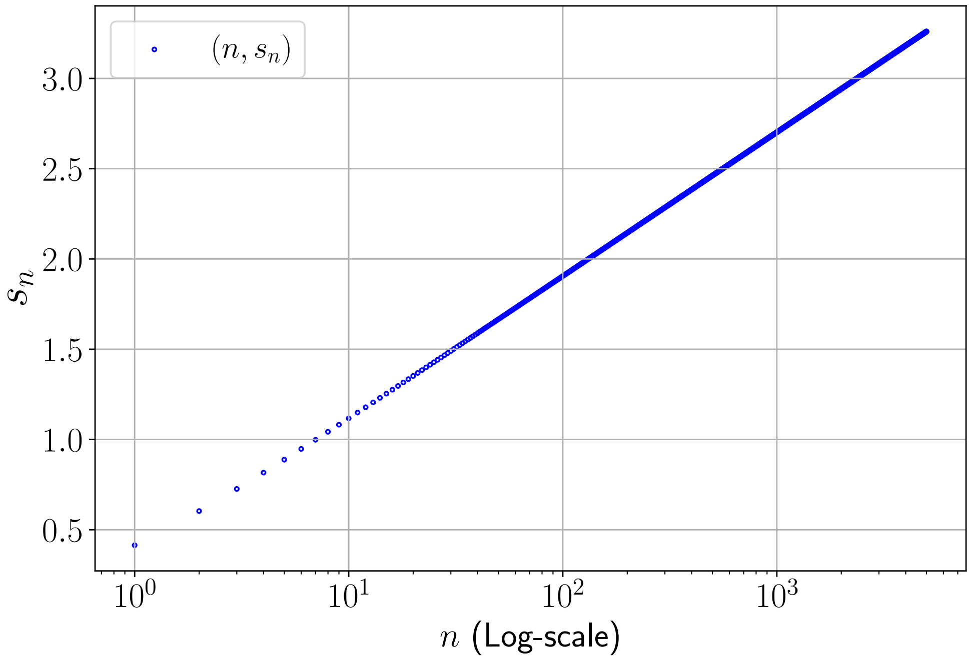
التمرين 75

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right).$$

الحل: لنضع: $a_n = \sqrt[n]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{n}} - 1$، و $b_n = \frac{1}{n}$. فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(2).$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلتَان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتَباعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 79.4).



شكل 79.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 5000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt[k]{2} - 1)$.

التمرين 76

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2n^3-1}.$$

الحل: إنَّ:

$$\ln(n) < n, \quad \forall n \geqslant 1$$

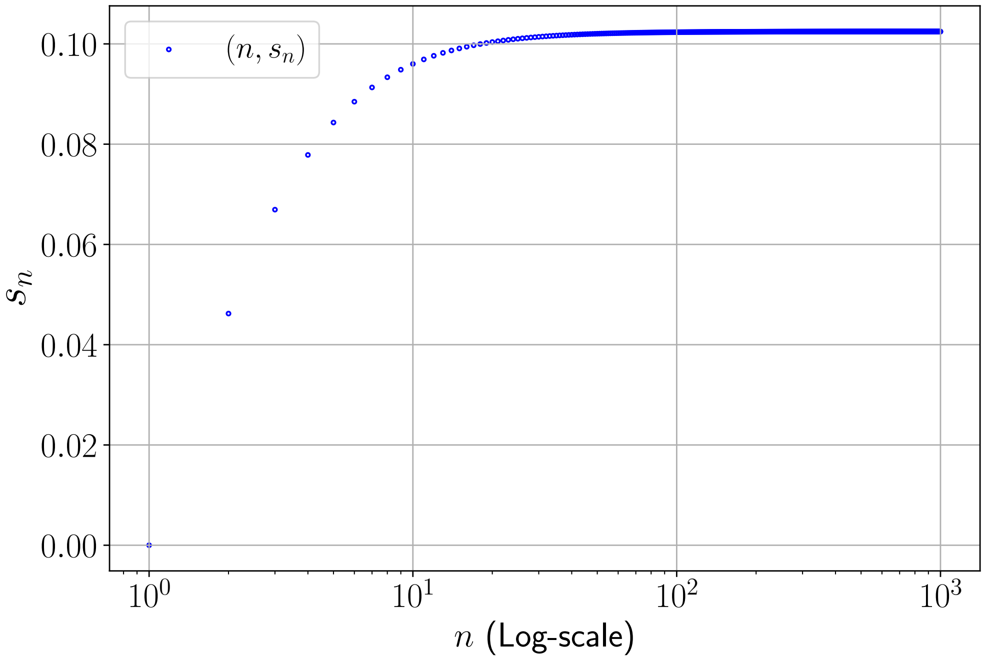
ومنه:

$$\frac{\ln(n)}{2n^3-1} < \frac{n}{2n^3-1}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

بأخذ: $a_n = \frac{n}{2n^3-1}$، و $b_n = \frac{1}{n^2}$، نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n^3-1} = \frac{1}{3}.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلتَان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ مُتَقارِبَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ، حيث $p = 2 > 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3-1}$ مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 80.4).



شكل 80.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2k^3-1}$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 0.1024627$. ومنه يمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2n^3-1} \approx 0.1$.

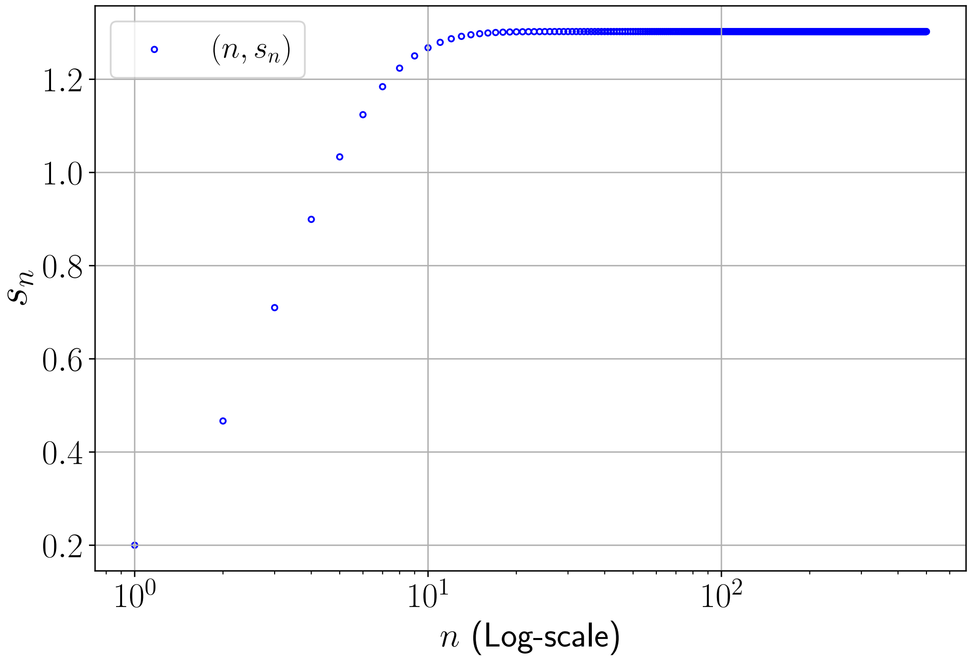
التمرين 77

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n-2}{3^n+4n-2}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{2^n+n-2}{3^n+4n-2}$، و $b_n = \frac{2^n}{3^n}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(2^n+n-2)}{2^n(3^n+4n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{6^n}\left(1+\frac{n}{2^n}-\frac{2}{2^n}\right)}{\cancel{6^n}\left(1+\frac{4n}{3^n}-\frac{2}{3^n}\right)} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَتَان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ مُتَقارِبَة (هَندسيَّة أساسها $q = \frac{2}{3} < 1$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 81.4).



شكل 81.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 500\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k+k-2}{3^k+4k-2}$، في هذا الشكل لدينا $s_{500} \approx 1.30242784$، ومنه يمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n-2}{3^n+4n-2} \approx 1.3$.

التمرين 78

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}.$$

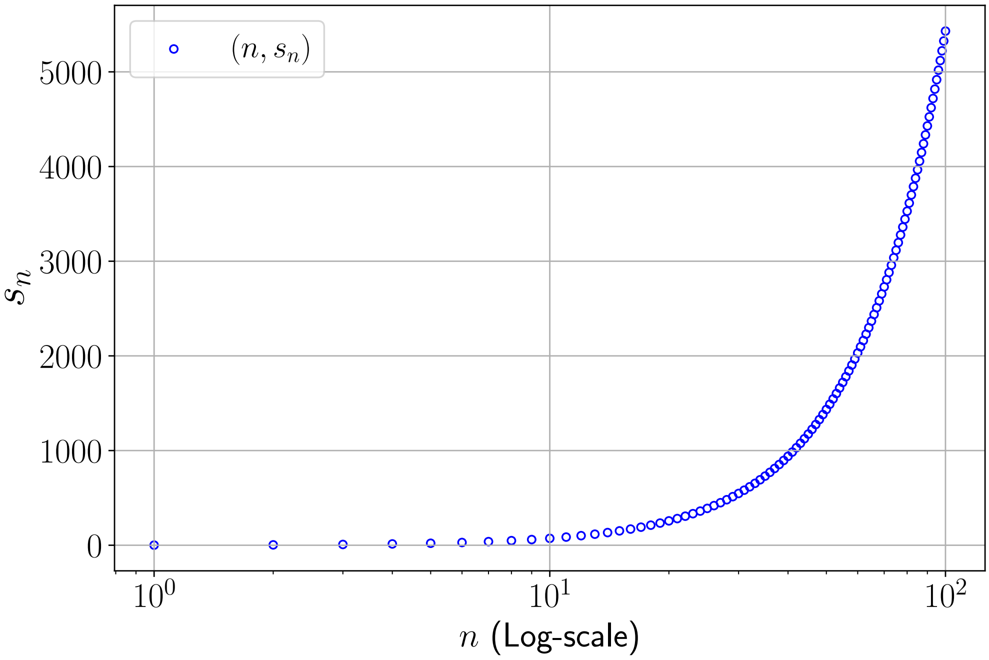
الحل: إنَّ:

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}.$$

ومنه بأخذ: $b_n = \frac{1}{n}$، نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلسِلتَان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مُتباعِدَة (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقيَّة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني (انظر الشكل 82.4).



شكل 82.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{k+1}{k}}}$.

ملاحظة 22:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{5+n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^5 - 1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin^2(n)}{n^3 + 2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n^2+3)^5}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

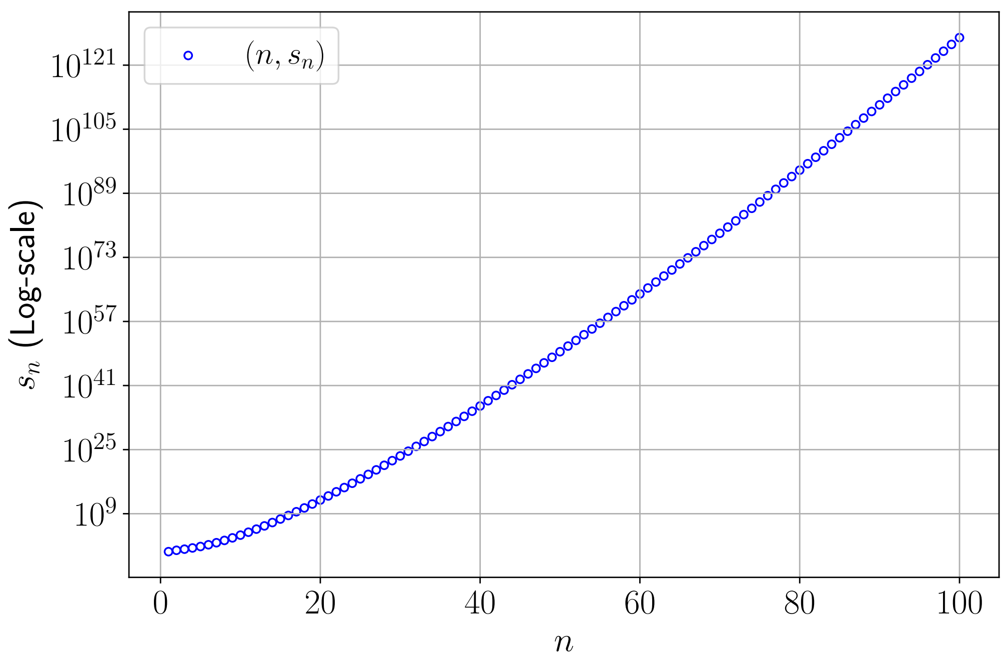
التمرين 79

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \frac{n!}{2^n+1}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot (2^n+1)}{(2^{n+1}+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot \cancel{2^n} \cdot (1+\frac{1}{2^n})}{\cancel{2^n}\cdot(2+\frac{1}{2^n})} = \infty.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 83.4).



شكل 83.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k!}{2^k+1}$، لاحظ أن المُتَتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ تَتَبَاعَد إلى اللانهاية بسرعة كبيرة.

التمرين 80

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+n^2}.$$

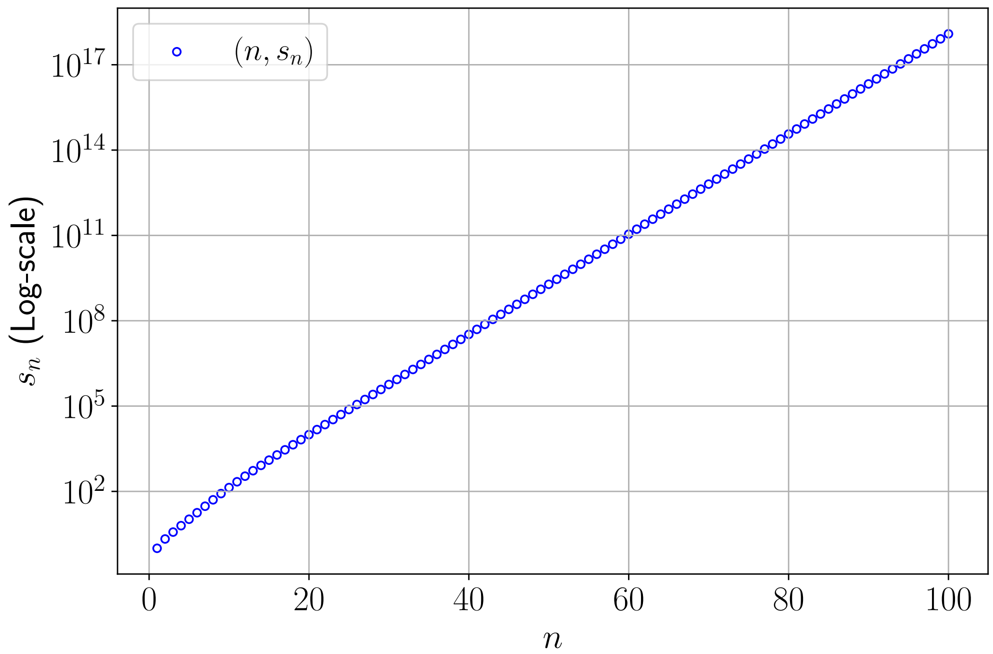
الحل: بوضع: $a_n = \frac{3^n}{2^n+n^2}$، نجد:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}\cdot(2^n+n^2)}{3^n\cdot(2^{n+1}+(n+1)^2)} = \frac{3\cdot 2^n \cdot \left(1+\frac{n^2}{2^n}\right)}{2^{n+1}\cdot\left(1+\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\right)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}.$$

لحساب النهاية: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$، نعتبر: $b_n = \frac{n^2}{2^n}$، ومنه نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot(n+1)^2}{2^{n+1}\cdot n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$، وبالتّالي: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} > 1$، ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة حسب اختبار دَالامْبِير (انظر الشكل 84.4).



شكل 84.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2^k + k^2}$، لاحظ أن المُتَتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ تَتَبَاعَد إلى اللانهاية بسرعة كبيرة.

التمرين 81

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \frac{n!}{e^{n^2}}$، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot \cancel{e^{n^2}}}{\cancel{e^{n^2}} \cdot e^{2n} \cdot e \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e \cdot e^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{n}{e^{2n}} + \frac{1}{e^{2n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{n}{e^{2n}} + \left(\frac{1}{e^2}\right)^n\right) = 0 < 1
\end{aligned}$$

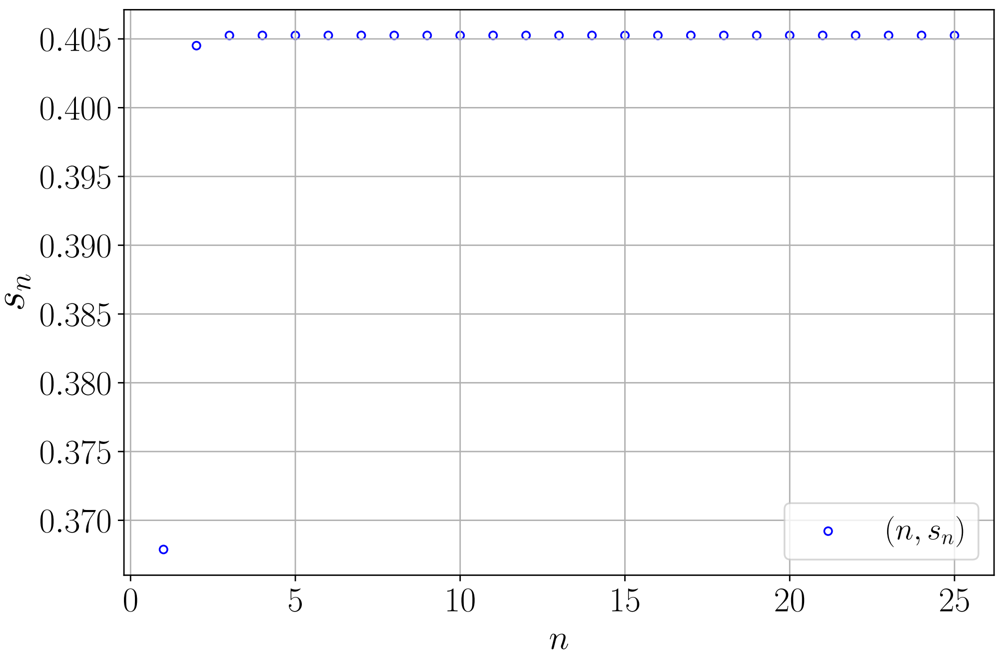
ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقَارِبَة حسب اختبار دَالامْبِير (انظر الشكل 85.4). حيث إن:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = 0$ لأنَّ $\frac{1}{e^2} < 1$.

(2) لحساب النهاية: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{2n}}$، نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e^2} = \frac{1}{e^2} < 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{2n}} = 0$.



شكل 85.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 25\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{e^{k^2}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{25} \approx 0.40525388$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}} \approx 0.4$.

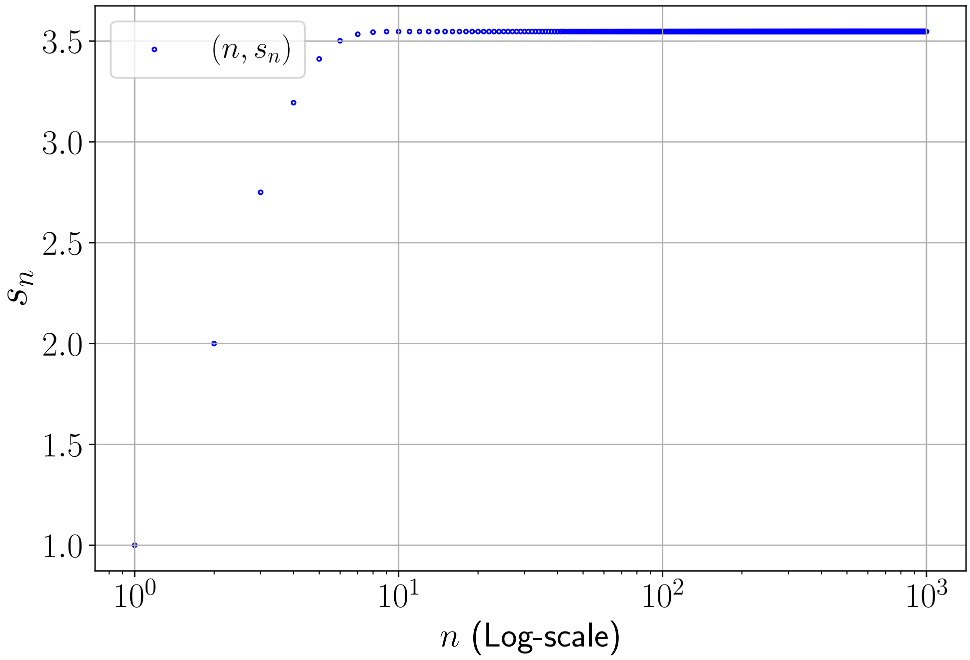
التمرين 82

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$. نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot \cancel{(n!)^2}}{((n+1)!)^2 \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot \cancel{(n!)^2}}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0 < 1.
\end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِير (انظر الشكل 86.4).



شكل 86.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^k}{(k!)^2}$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 3.54724955$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \approx 3.55$.

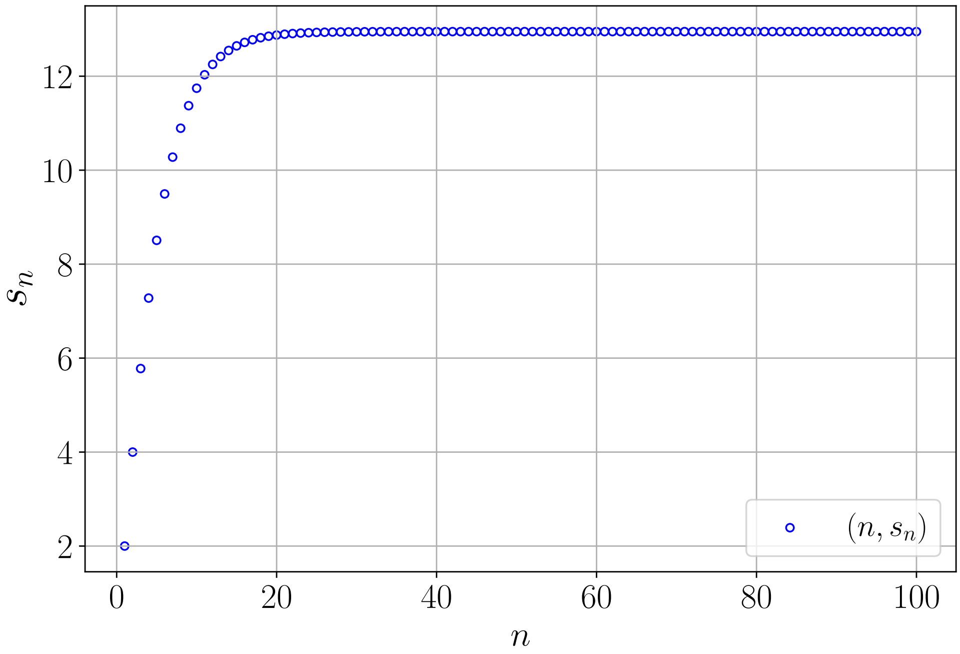
التمرين 83

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 87.4).



شكل 87.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot k!}{k^k}$، في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 12.94895$، ومنه يمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \approx 13$.

التمرين 84

$\frac{1}{2} + \frac{4}{4!} + \frac{(3!)^2}{6!} + \ldots$

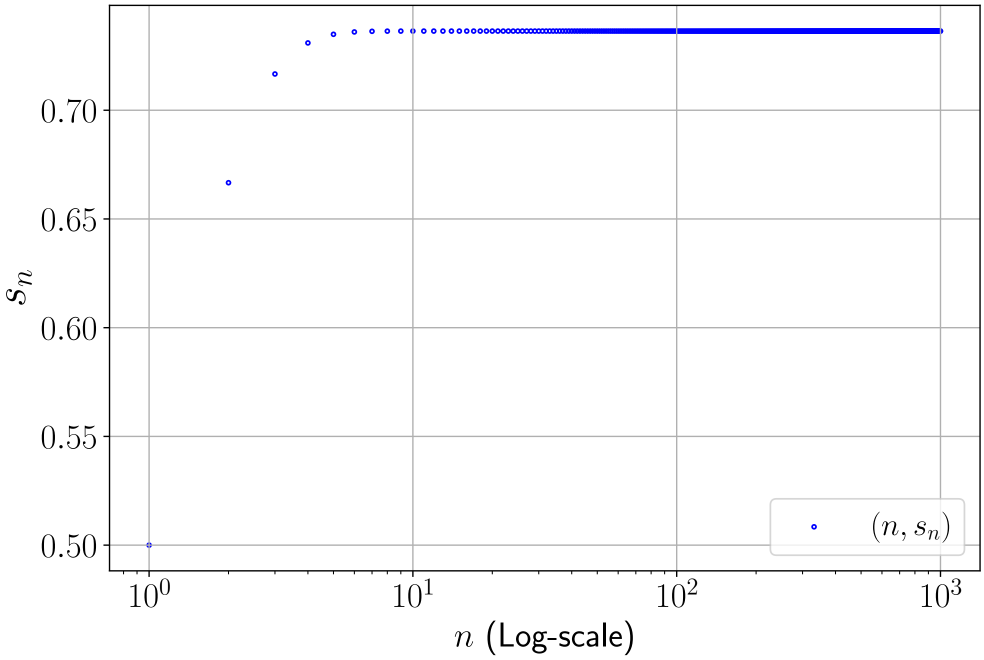
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \frac{(3!)^2}{6!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

بوضع: $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot (n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2} \cdot \cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1) \cdot \cancel{(2n)!} \cdot \cancel{(n!)^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1
\end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِير (انظر الشكل 88.4).



شكل 88.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$، في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 0.73639985$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \approx 0.74$.

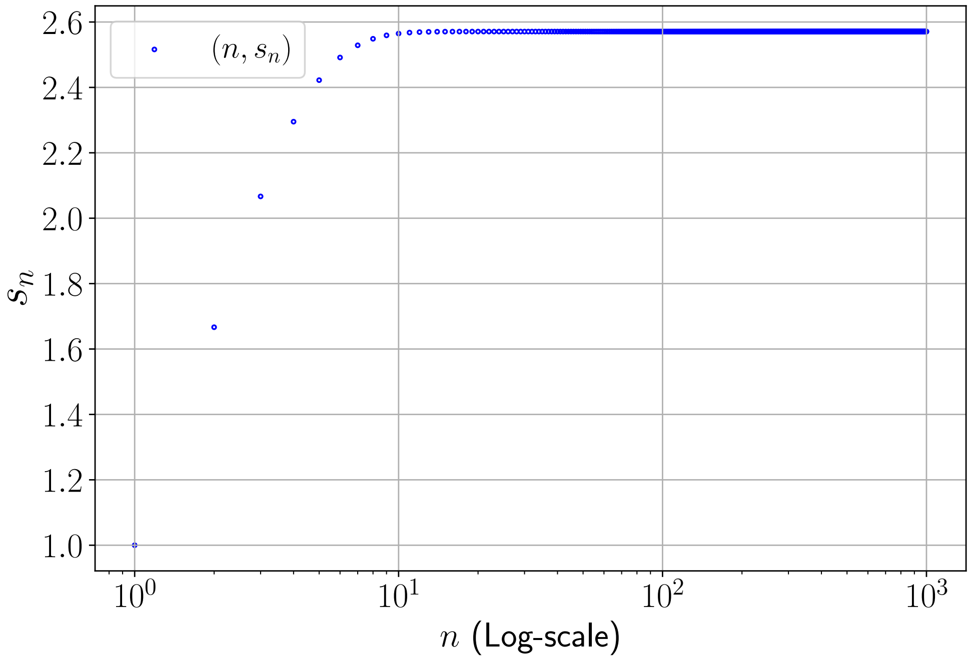
التمرين 85

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \frac{n!}{(2n-1)!!}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot (2n-1)!!}{(2n+1)!! \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{(2n-1)!!}}{(2n+1) \cdot \cancel{(2n-1)!!} \cdot \cancel{n!}} = \frac{1}{2} < 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 89.4).



شكل 89.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(2k-1)!!}$، في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 2.5707963$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!} \approx 2.57$.

التمرين 86

$$2 + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 5} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9} + \dots$$

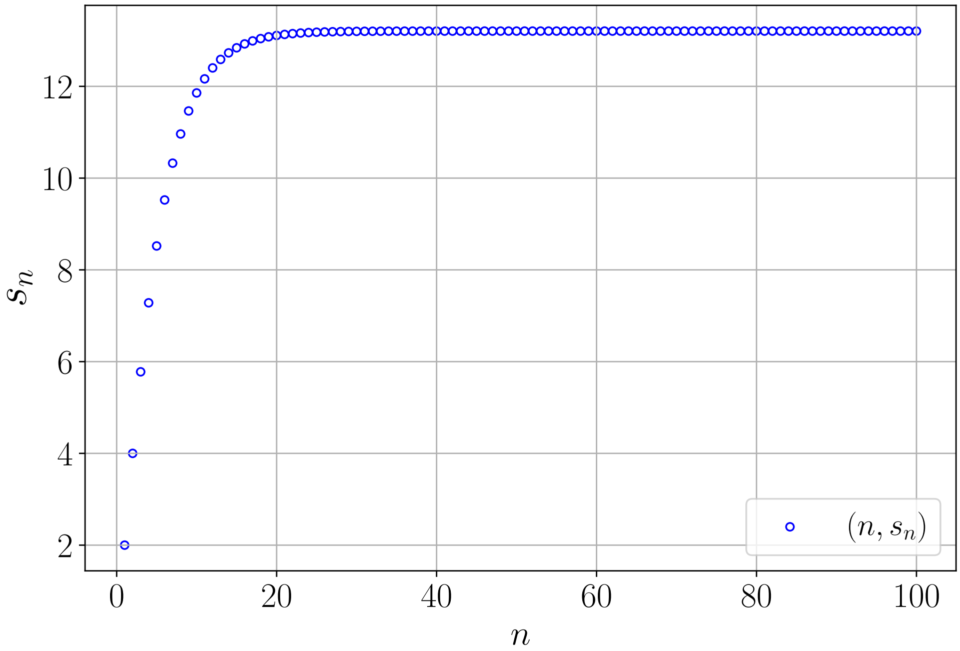
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(4k-3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}.$$

بوضع: $a_n = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)(4n+1)} \cdot \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1.
\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 90.4).



شكل 90.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 13.204732$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 13.2$.

التمرين 87

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \ldots$$

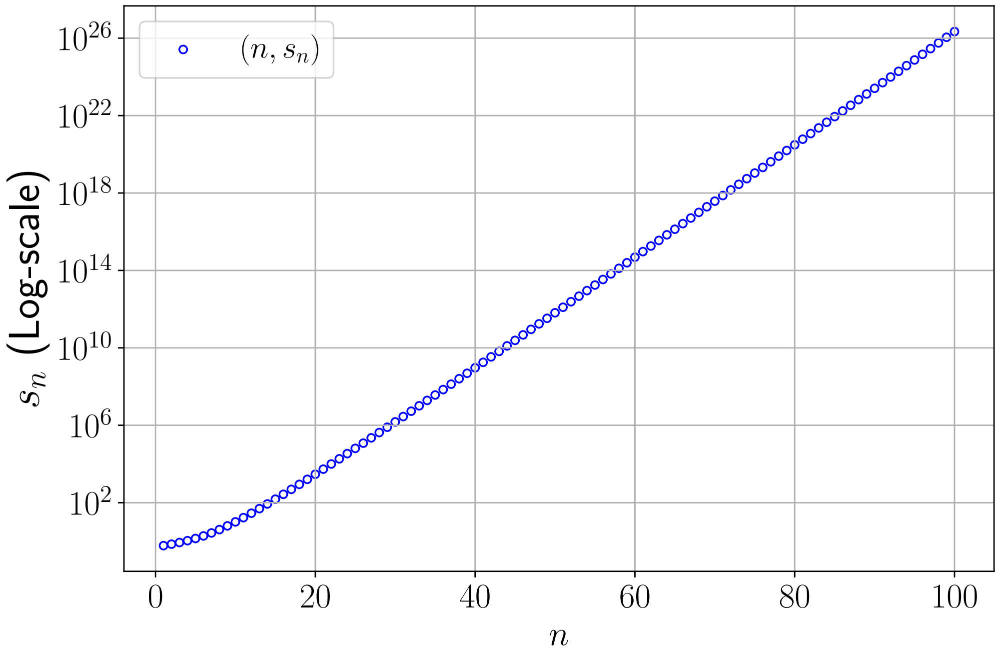
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+4)}.$$

بوضع: $a_n = \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+4)}$، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)(4n+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+4)(2n+6)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+4)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{2n+6} = 2 > 1.
\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتبَاعِدَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 91.4).



شكل 91.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k$.

التمرين 88

$$a + \frac{a(a+2)}{4} + \frac{a(a+2)(a+4)}{4 \cdot 7} + \ldots \qquad \forall a > 0.$$

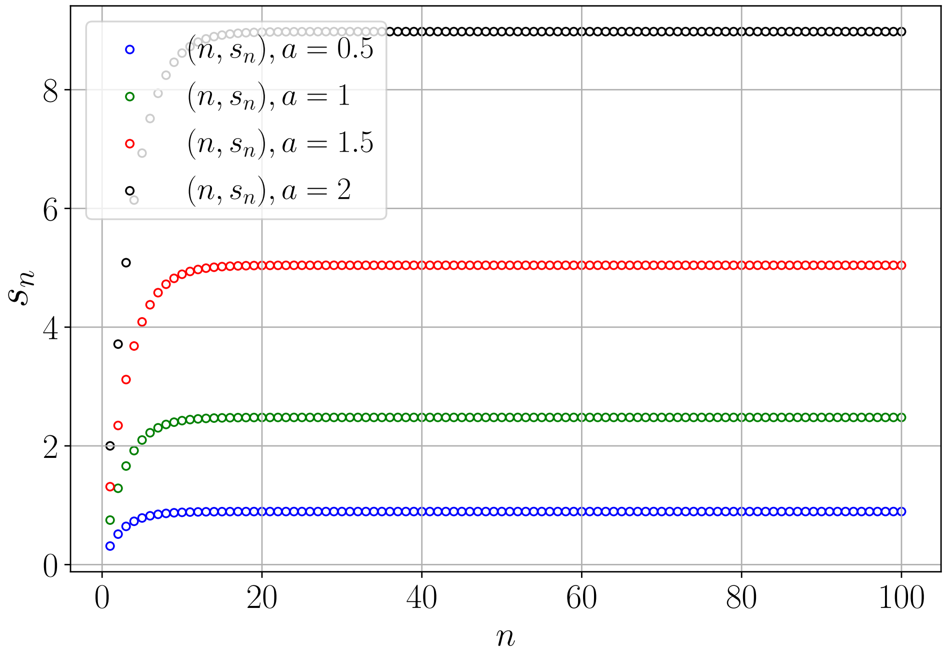
الحل: المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(a+2k)}{\prod_{k=0}^{n}(4k+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}.$$

بوضع: $a_n = \frac{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}$، نجد:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n)(a+2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n+1)(3n+4)} \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{a(a+2)(a+4)\cdots(a+2n)} \\ &= \frac{a+2n+2}{3n+4}. \end{aligned}$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} < 1$، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقَارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 92.4).



شكل 92.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

في الشكل 92.4 لدينا $s_{100} \approx 0.893921$ من أجل $a = 0.5$، و $s_{100} \approx 2.479372$ من أجل $a = 1$، و $s_{100} \approx 5.042396$ من أجل $a = 1.5$، و $s_{100} \approx 8.978561$ من أجل $a = 2$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.89$ من أجل $a = 0.5$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 2.48$ من أجل $a = 1$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 5.04$ من أجل $a = 1.5$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 8.98$ من أجل $a = 2$.

التمرين 89

$$1 + \tfrac{2}{2^2} + \tfrac{4}{3^3} + \tfrac{6}{4^4} + \dots$$

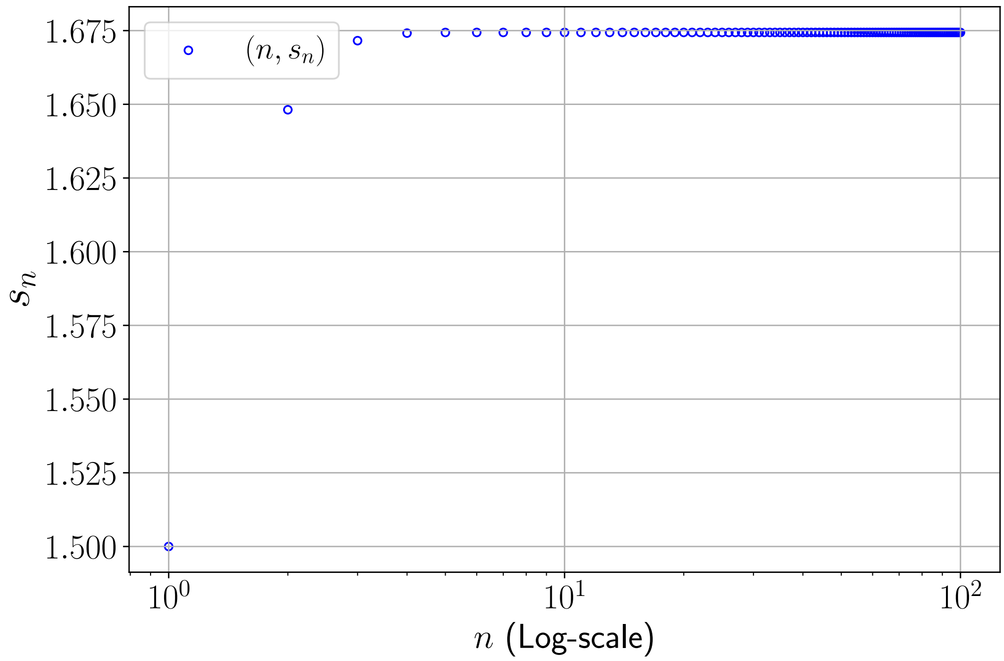
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)^{n+1}}.$$

بوضع: $a_n = \frac{2n}{(n+1)^{n+1}}$، نجد:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)(n+1)^{n+1}}{2n(n+2)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{n+2} = (0)(e^{-1}) = 0 < 1. \end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 93.4).



شكل 93.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k}{(k+1)^{k+1}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 1.674375$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)^{n+1}} \approx 1.67$. لاحظ من الشكل سرعة التَّقارُب إلى المجموع بدءًا من الحد الرابع.

ملاحظة 23:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^2}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10} \cdot n^2}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n},$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \ldots,$$

$$1 + \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1!} + \frac{1 \cdot 11}{3!} + \frac{1 \cdot 11 \cdot 21}{5!} + \ldots$$

التمرين 90

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2}}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \frac{n^n}{3^{n^2}}$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}.$$

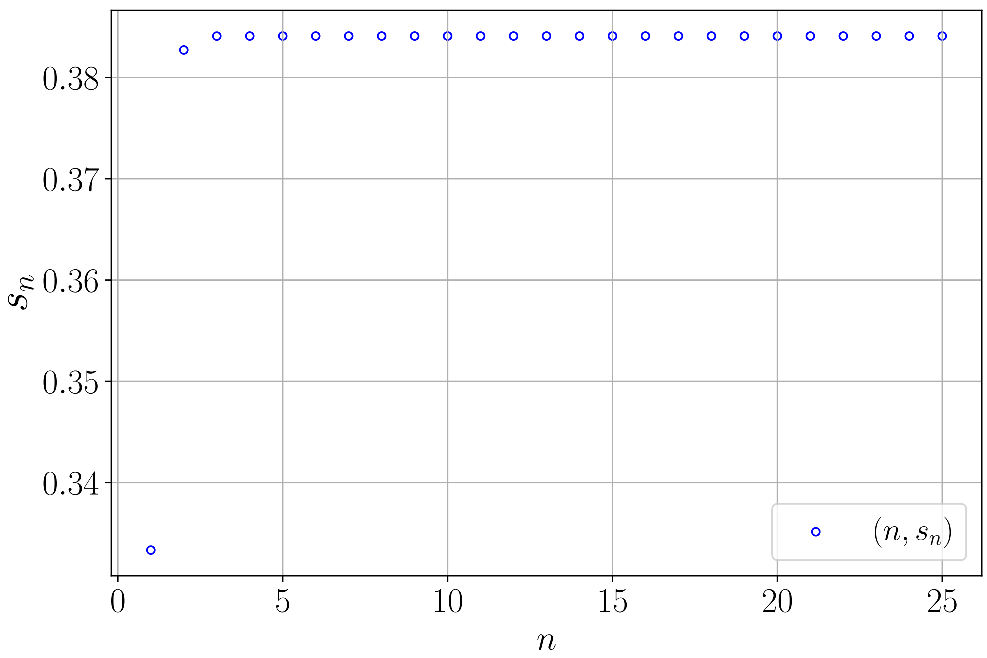
لنضع: $b_n = \frac{n}{3^n}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(3^n)}{n\left(3^{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

وبالتَّالي فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 94.4).



شكل 94.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 25\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^k}{3^{k^2}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{25} \approx 0.38409374$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2}} \approx 0.38$.

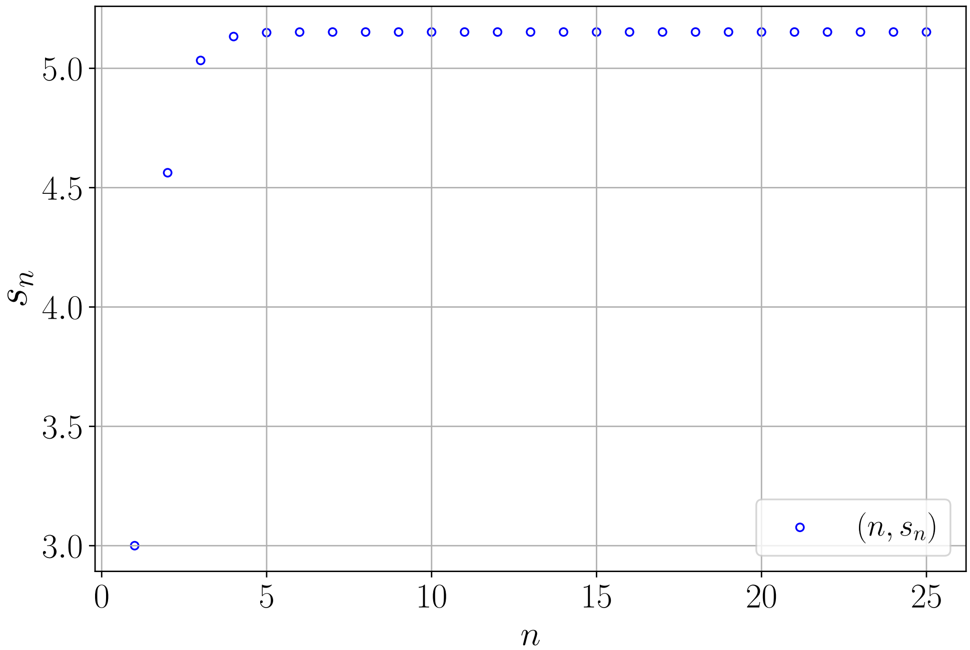
التمرين 91

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}} = \frac{(2n+1)^n}{n^n \cdot n^n}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)^n}{n^n \cdot n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0 < 1.$$

وبالتَّالي فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 95،4).



شكل 95،4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 25\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)^k}{k^{2k}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{25} \approx 5.1521$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}} \approx 5.15$.

التمرين 92

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln(n)}.$$

لنضع:

$$y = \left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{\ln(x)}, \qquad \forall x \geqslant 1.$$

فنجد:

$$\ln(y) = \ln(x)\ln\left(\frac{x+3}{2x+1}\right).$$

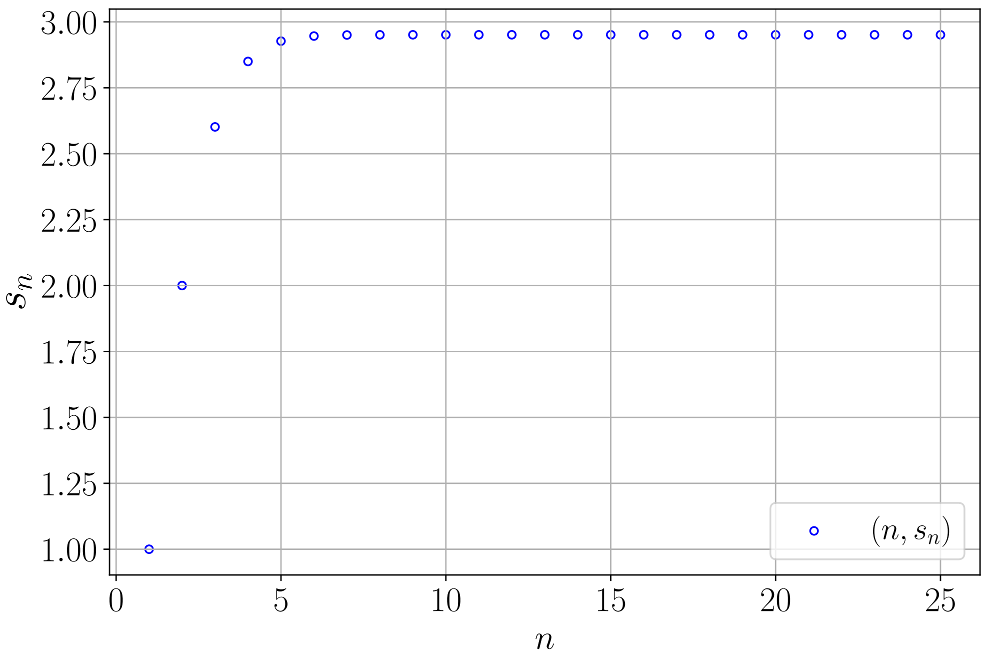
ومنه:

$$\lim_{x\to\infty}\ln(y) = \lim_{x\to\infty}\ln(x)\ln\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) = -\infty.$$

ومنه: $\lim_{x\to\infty} y = 0$، وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln(n)} = 0 < 1.$$

والمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 96،4).



شكل 96،4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 25\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+3}{2k+1}\right)^{k\ln(k)}$، في هذا الشكل لدينا $s_{25} \approx 2.950982$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln(n)} \approx 2.95$.

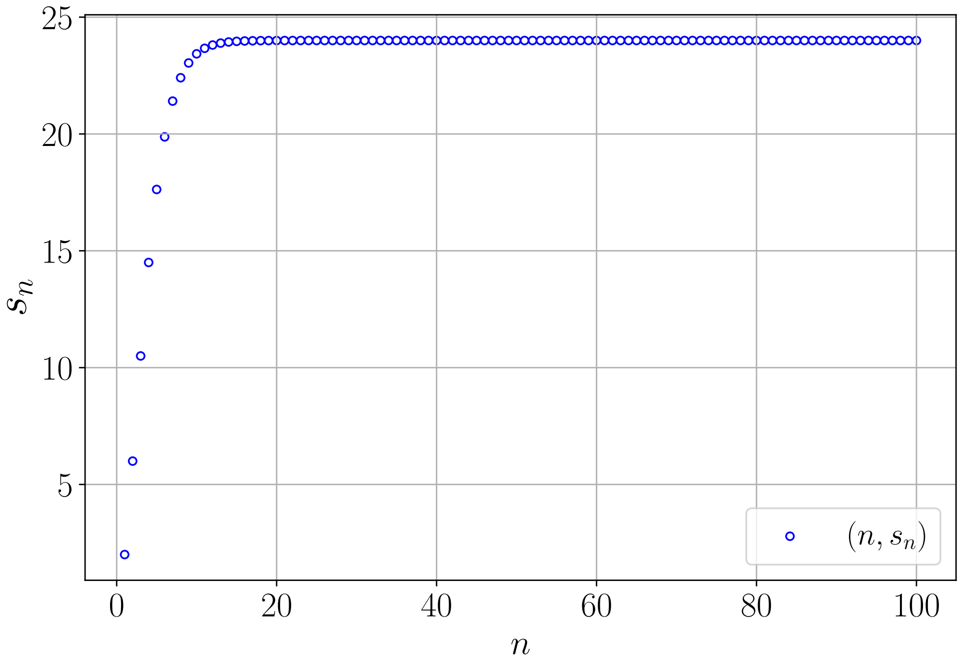
التمرين 93

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 \cdot 2^{n+2}}{4^n}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{n^2 \cdot 2^{n+2}}{4^n}$، فنجد:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 \cdot 2^{n+2}}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4 \cdot n^2 \cdot 2^n}{4^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{4}\right)\left(\sqrt[n]{n}\right)\left(\sqrt[n]{n}\right) = \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَةَ حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 97.4).



شكل 97.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 \cdot 2^{k+2}}{4^k}$، في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 23.99999$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+2}}{4^n} \approx 24$.

التمرين 94

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1}}{3^{n^2} \cdot \sqrt{n}}.$$

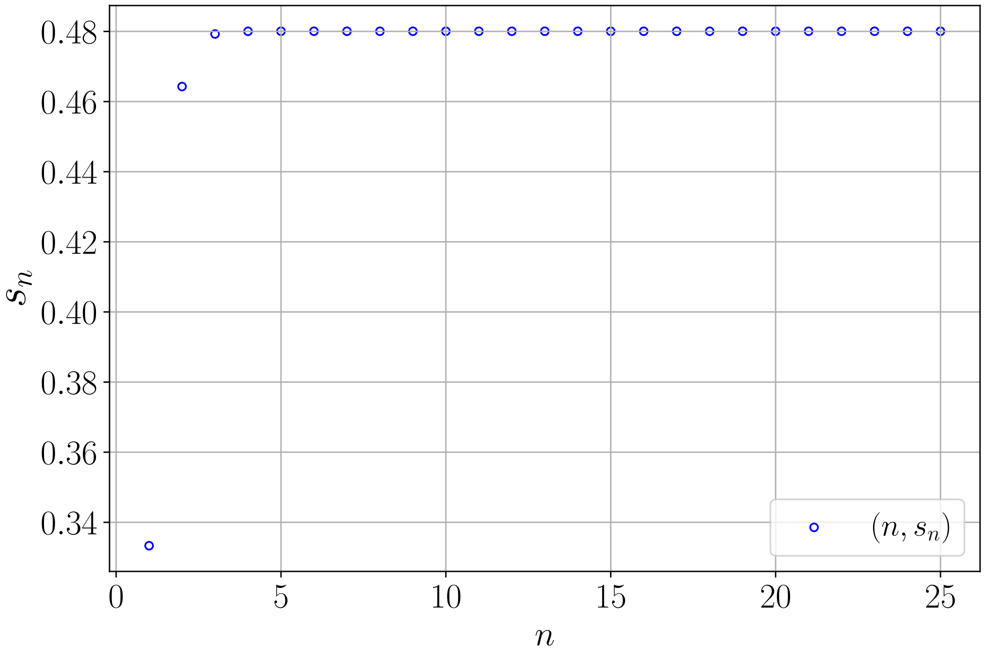
الحل: لنضع:

$$a_n = \frac{2^{n^2-1}}{3^{n^2} \cdot \sqrt{n}} = \frac{2^{n^2}}{2\left(3^{n^2}\right) \cdot \sqrt{n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = 0 < 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 98.4).



شكل 98.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 25\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{k^2-1}}{3^{k^2} \cdot \sqrt{k}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{25} \approx 0.480047$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1}}{3^{n^2} \cdot \sqrt{n}} \approx 0.48$.

التمرين 95

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

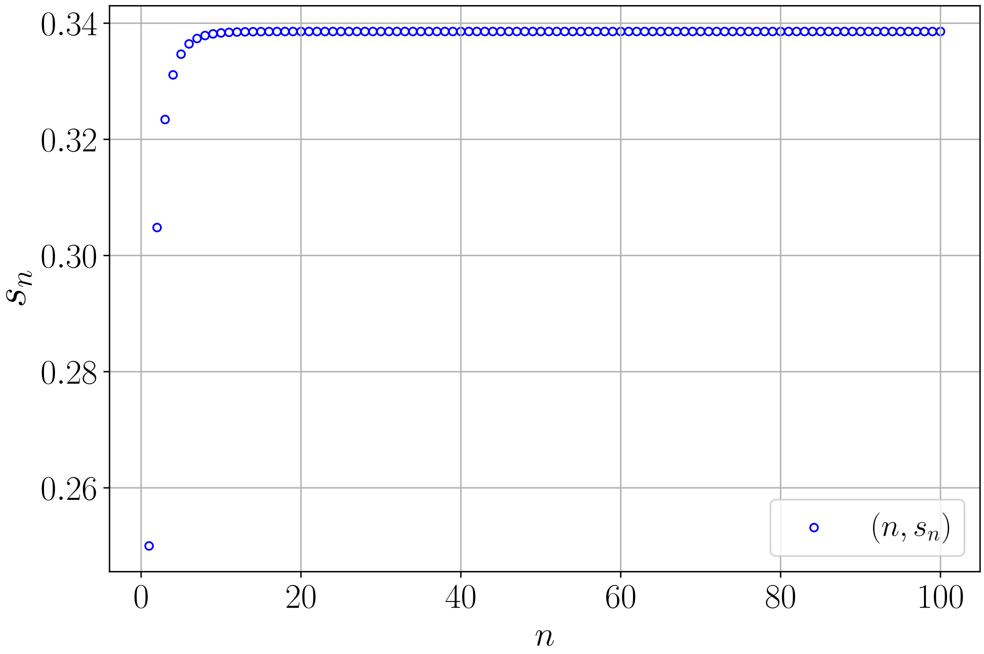
الحل: لنضع: $a_n = \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$، فنجد:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}} = \frac{n \cdot n^{-\frac{1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2n}}} \\
&= \frac{n}{\sqrt[n]{n} \cdot (n^2)^{\frac{n+1}{2n}} \cdot \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2n}}} \\
&= \frac{n}{\sqrt[n]{n} \cdot n^{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2n}}} \\
&= \frac{\cancel{n}}{\sqrt[n]{n} \cdot \cancel{n} \cdot \sqrt[n]{n} \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2n}}}
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 99.4).



شكل 99.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{k-1}}{(2k^2+k+1)^{\frac{k+1}{2}}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 0.33857$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}} \approx 0.34$.

التمرين 96

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \dots$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}.$$

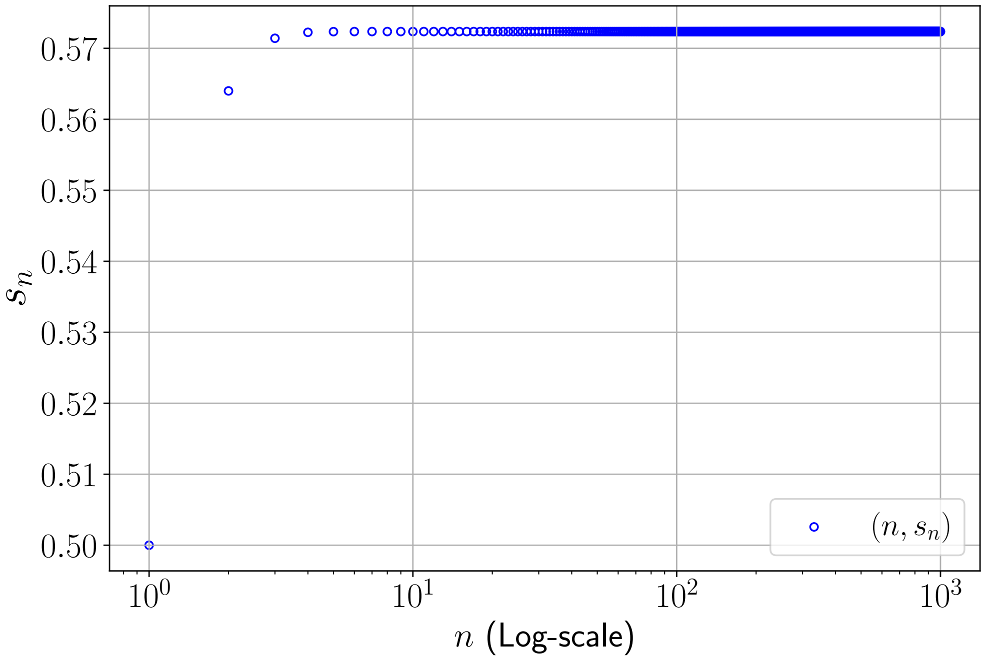
لنضع:

$$a_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} = \left[\left(\frac{n}{3n-1}\right)^2\right]^n \cdot \frac{1}{\frac{n}{3n-1}}$$

فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{n}{3n-1}}} = \frac{1}{9} < 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 100.4).



شكل 100.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 0.572363$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} \approx 0.57$.

التمرين 97

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} + \frac{5}{7} + \left(\frac{7}{10}\right)^{3/2} + \ldots$$

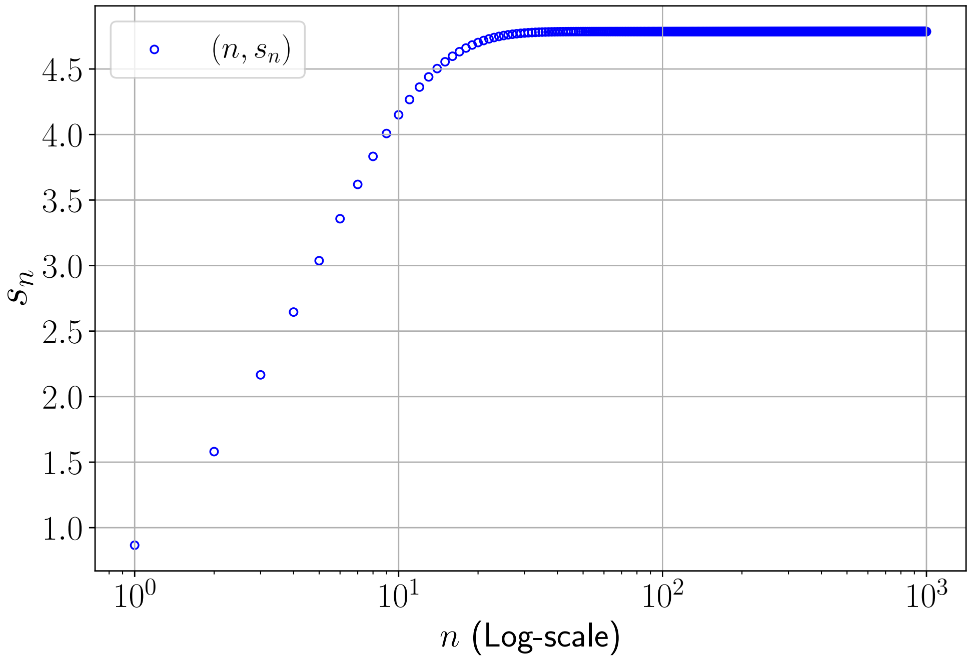
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

لنضع: $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 101.4).



شكل 101.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k+1}{3k+1}\right)^{\frac{k}{2}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 4.7856924$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \approx 4.78$.

التمرين 98

$$\frac{1}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} + \ldots$$

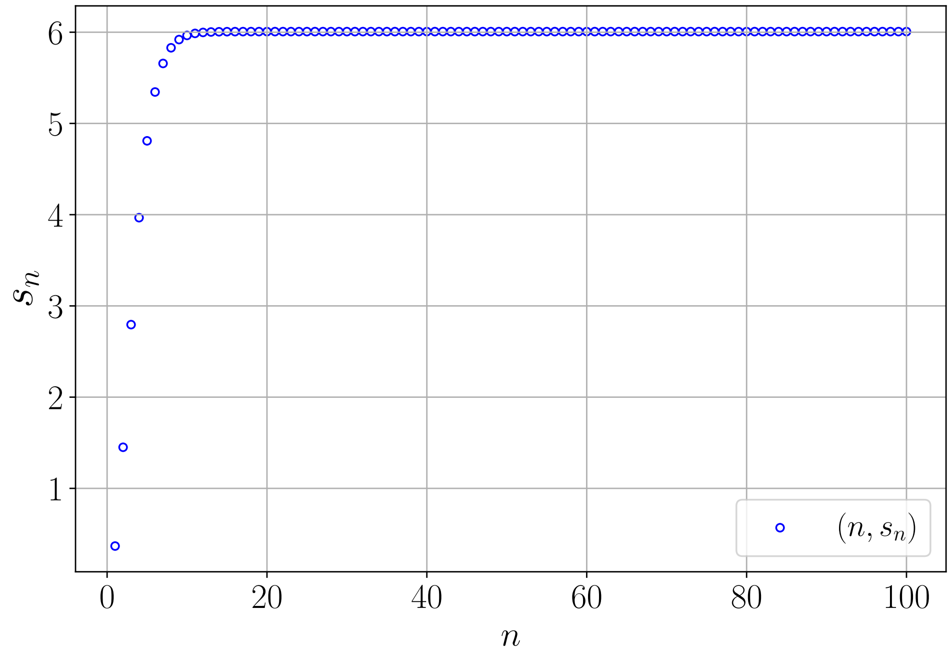
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}.$$

لنضع: $a_n = \frac{n^3}{e^n}$. فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{e} = \frac{1}{e} < 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي(انظر الشكل 102.4).



شكل 102.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^3}{e^k}$، في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 6.006513$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n} \approx 6$.

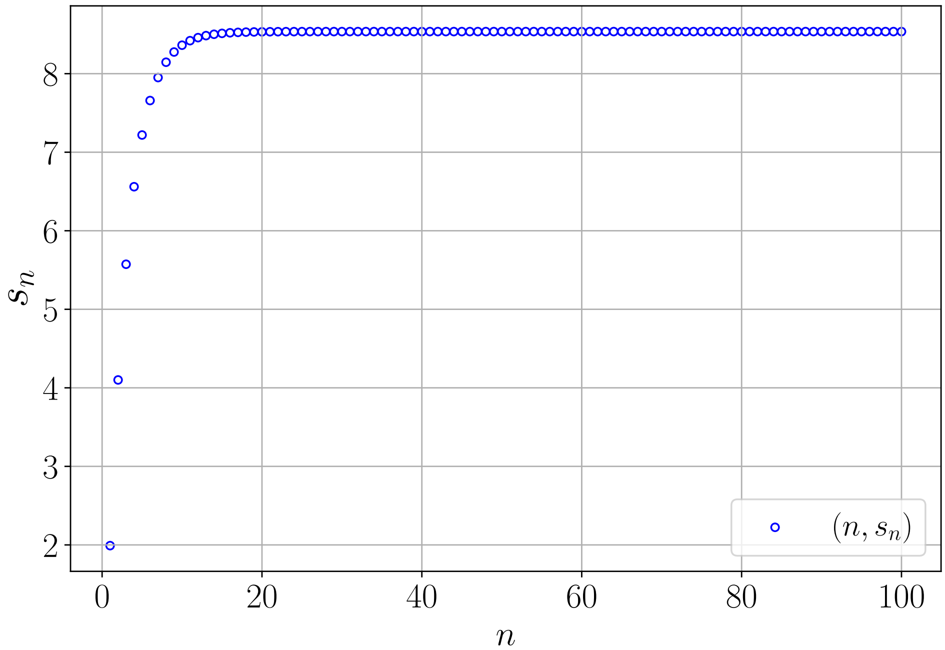
التمرين 99

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{5}{3^n}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n = 2^n \sin\left(\frac{5}{3^n}\right)$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n \sin\left(\frac{5}{3^n}\right)}{\frac{5}{3^n}} \cdot \frac{5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{5}{3^n}\right)}{\frac{5}{3^n}}} \cdot \sqrt[n]{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 103.4).



شكل 103.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} 2^n \sin\left(\frac{5}{3^k}\right)$. في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 8.535791$. ومنه يمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{5}{3^n}\right) \approx 8.54$.

التمرين 100

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{10n}}.$$

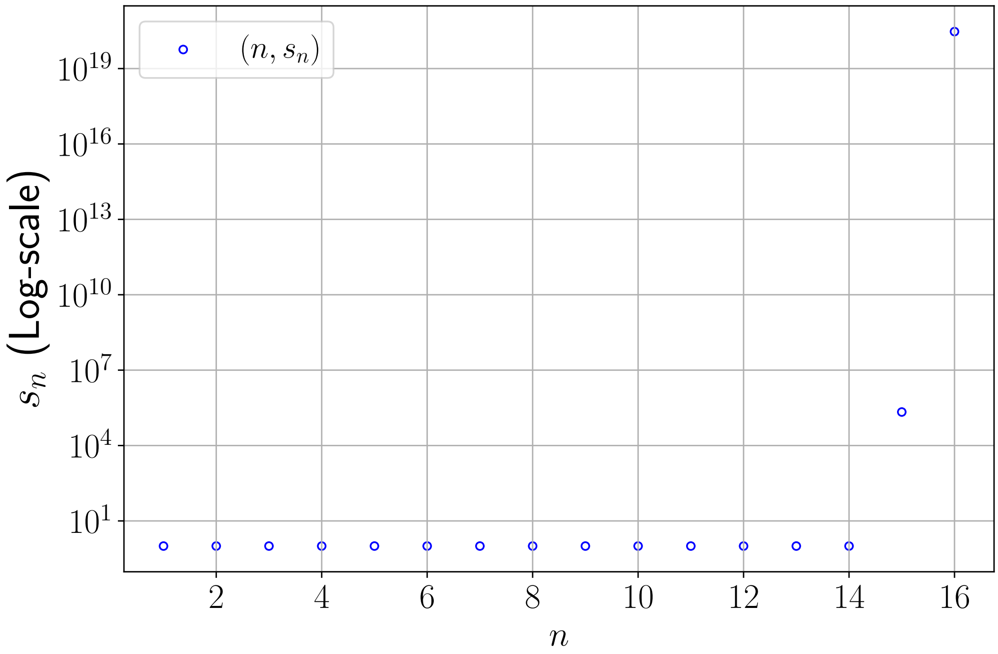
الحل: لنضع: $a_n = \frac{(n!)^n}{n^{10n}}$. فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{n^{10n}}} = \frac{n!}{n^{10}}.$$

لكن عندما: $n \to \infty$، يكون: $n^{10} \ll n!$. ومنه فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty > 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 104.4).



شكل 104.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k!)^k}{k^{10k}}$. لاحظ أن المُتَتَالِيَة $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ تَتَبَاعَد إلى اللانهاية بشكل كبير جدًا بدءًا من الحد الخامس عشر.

ملاحظة 24:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة تَقَارُب أو تَبَاعُد المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2^n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2(5^n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{n}\right)^n, \quad 1 + 2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{n}\right)^n, \quad 1 + 2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \ldots,$$

$$\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3}\right)^{-3} + \cdots$$

التمرين 101

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot n!}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{n^n}{e^n \cdot n!}$، فنجد:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot e^n \cdot n!}{e^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{e \cdot n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} = \frac{e}{e} = 1.\end{aligned}$$

ومنه فإنَّ اختبار دَالامْبِيْر يفشل في تحديد طبيعة المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة. كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}.$$

لحساب النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ نضع: $b_n = \frac{n^n}{n!}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

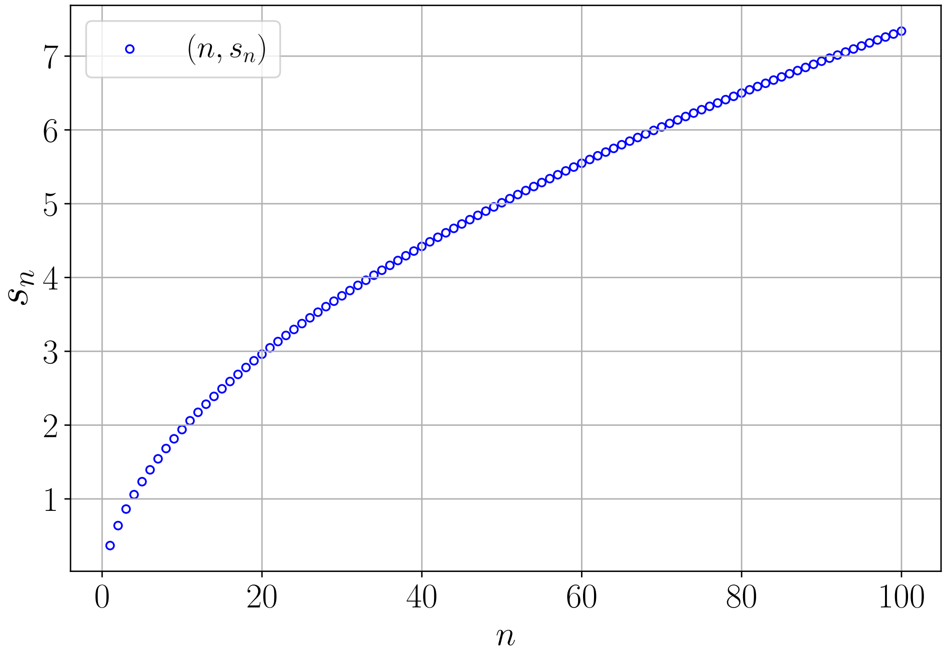
ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = e \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ اختبار كُوشِي يفشل في تحديد طبيعة المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة أيضًا. لنطبق الآن اختبار رَابْ.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^n \cdot e^{n+1} \cdot (n+1)!}{e^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{e \cdot n^n}{(n+1)^n} - 1\right) = \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار رَابْ (انظر الشكل 105.4).



شكل 105.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^k}{e^k \cdot k!}$.

التمرين 102

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\right)^2 + \ldots$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-2)}{\prod_{k=1}^{n}(3k)}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}\right)^2.$$

لنضع: $a_n = \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}\right)^2$، فنجد (سَنُطَبِّق اختبار رَابْ لأنَّ اختبار دَالاَمْبِيْر يفشل في تحديد طبيعة المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، تَحَقَّقْ من ذلك!):

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{12n+8}{(3n+1)^2}\right) = \frac{12}{9} > 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار رَابْ.

التمرين 103

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}\cdot((n-1)!)^2}{((2n-1)!!)^2}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{((2n-1)!!)^2}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{((2n+1)!!)^2} \cdot \frac{((2n-1)!!)^2}{4^{n-1}\,((n-1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{(2n+1)^2} = 1.$$

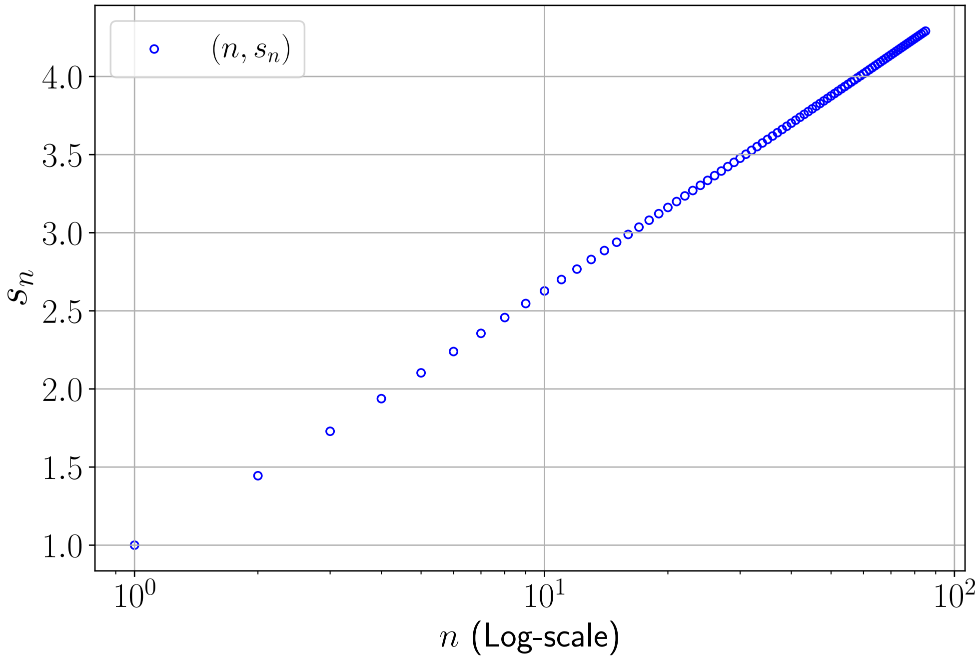
ومنه فإنَّ اختبار دَالامْبِير يفشل في تحديد طبيعة المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة. كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+1)^2}{4n^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n}{4n^2} = 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ اختبار رَابْ يفشل في تحديد طبيعة المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة أيضًا. لذلك سَنُطَبِّق اختبار بِرْتْرَان، لنجد:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{n\to\infty} \ln(n)\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \ln(n)\cdot\left(\frac{4n^2+n}{4n^2} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\ln(n)}{4n^2} = 0 < 1. \end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة حسب اختبار بِرْتْرَان (انظر الشكل 106.4).



شكل 106.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 85\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4^{k-1}\cdot((k-1)!)^2}{((2k-1)!!)^2}$.

التمرين 104

ادرس، حسب قيم $a > 0$، تقارُب أو تباعُد المُتَسَلْسِلَة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}.$$

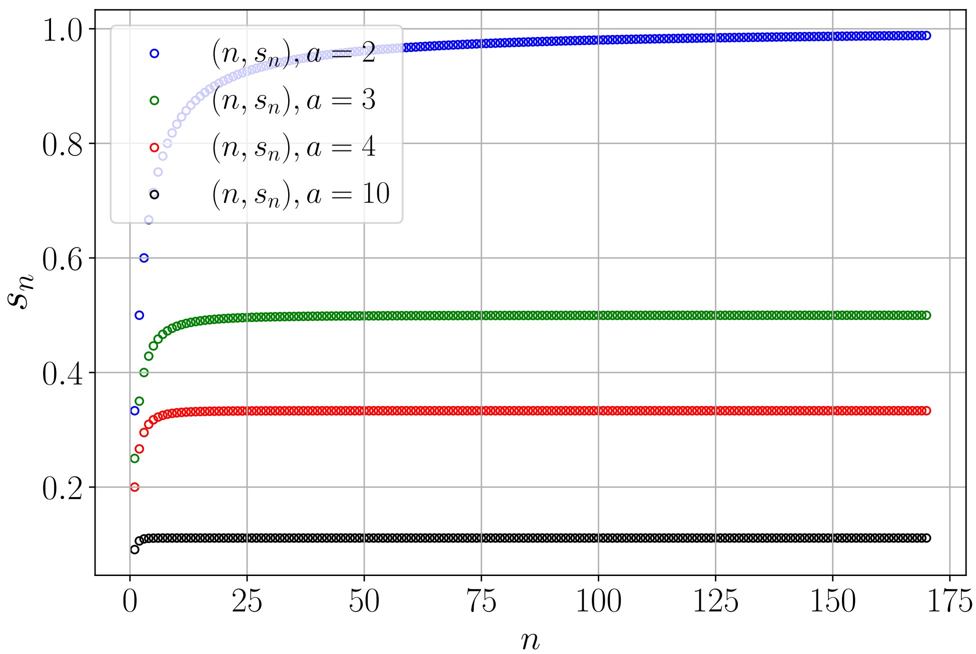
الحل: سَنُطَبِّق اختبار رَاب لأنَّ اختبار دَالامْبِير يفشل في تحديد طبيعة المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة، تَحَقَّقْ من ذلك!. لنضع: $a_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$، فنجد

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(a+1)\dots(a+n)(a+n+1)\cdot n!}{(a+1)\dots(a+n)\cdot(n+1)!}-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1} = a.\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة تكون مُتَقَارِبَة حسب اختبار رَاب، عندما: $a > 1$ (انظر الشكل 107،4)، ومُتَبَاعِدَة عندما: $a < 1$ (انظر الشكل 108،4). وعندما يكون: $a = 1$، فإنَّه تنتج لدينا المُتَسَلْسِلَة الآتية:

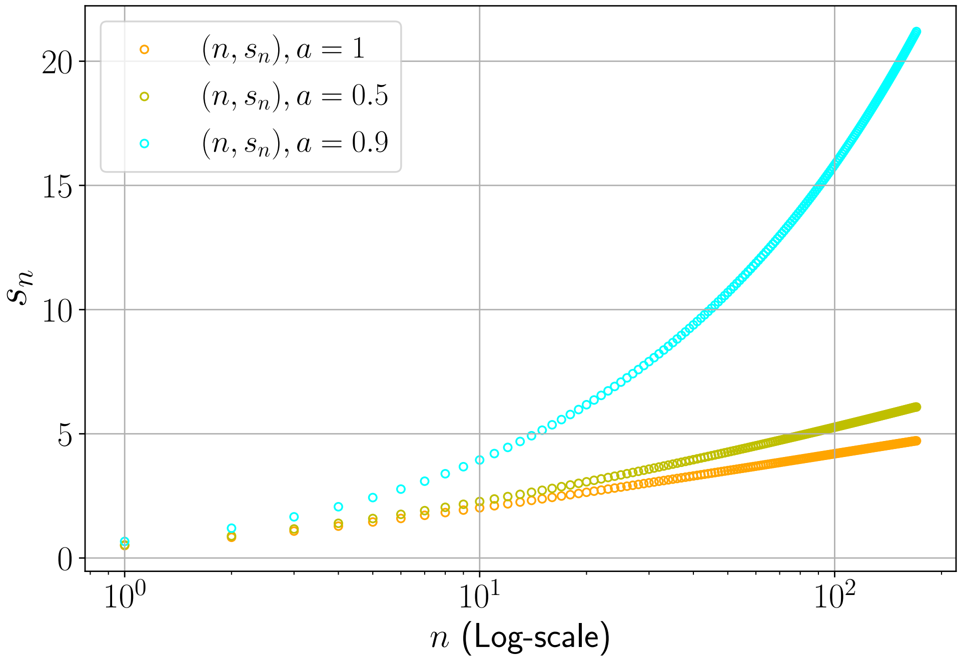
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(1+1)(1+2)\dots(1+n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

وهي مُتَسَلْسِلَة مُتَبَاعِدَة.



شكل 107،4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 170\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

في الشكل 107.4 لدينا $s_{170} \approx 0.988235$ من أجل $a = 2$، و $s_{170} \approx 0.499895$ من أجل $a = 3$، و $s_{170} \approx 0.333332$ من أجل $a = 4$، و $s_{170} \approx 0.111111$ من أجل $a = 10$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.99$ من أجل $a = 2$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.5$ من أجل $a = 3$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.33$ من أجل $a = 4$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.11$ من أجل $a = 10$.



شكل 108.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 170\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

التمرين 105

ادرس، حسب قيم $a > 0, b > 0$، نوع المُتَسَلسِلَة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}$، فيكون:

$$a_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)(b+n)}.$$

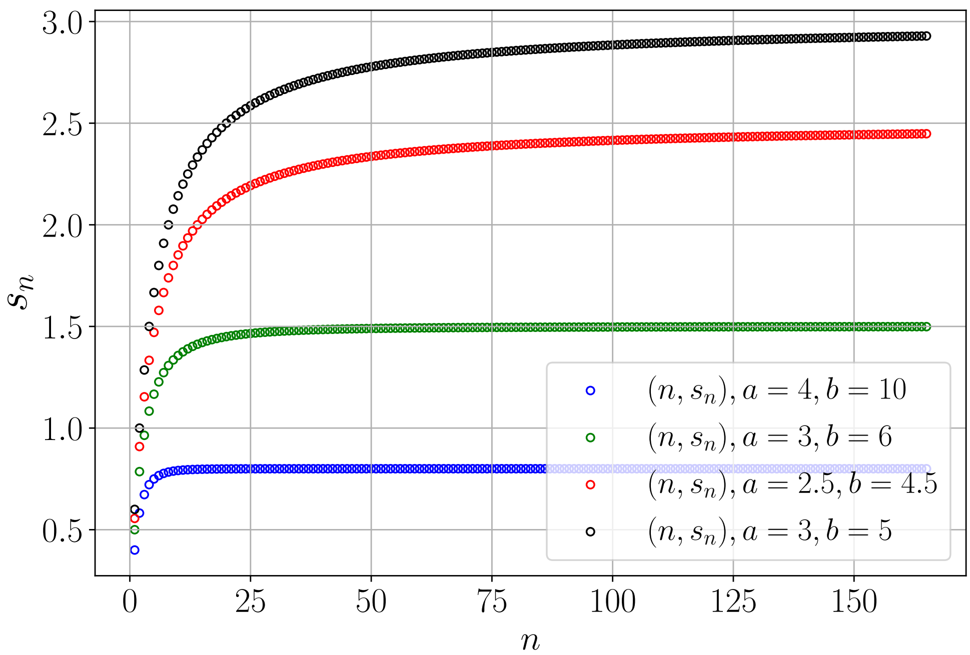
ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a+n}{b+n} = 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ اختبار دَالامْبِيْر يفشل في تحديد طبيعة المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة. لنطبق اختبار رَابْ. إن:

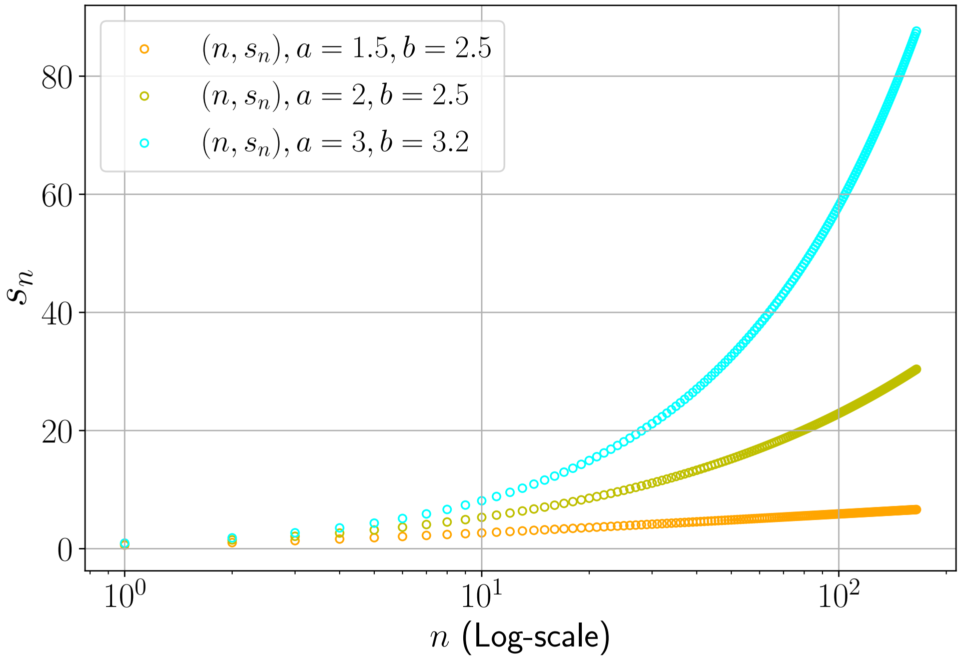
$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b+n}{a+n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(b-a)}{n+a}=b-a.$$

إذا كان: $b-a=1$ أي: $b=a+1$. فإنَّه تنتج لدينا المُتَسَلْسِلَة: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a+n}$، وهي مُتَسَلْسِلَة مُتباعِدَة، حسب اختبار المُقارَنة الثاني (نقارن مع المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة المُتَبَاعِدَة). وبالتَّالي فإنَّه مما سبق نجد أنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة عندما يكون: $b-a>1$ (انظر الشكل 109.4)، ومُتَباعِدَة عندما يكون: $b-a\leqslant 1$ (انظر الشكل 110.4).



شكل 109.4: النقاط (n,s_n) حيث $n\in\{1,2,\ldots,165\}$ و $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

في الشكل 109.4 لدينا $s_{165}\approx 0.799999$ من أجل $a=4, b=10$، و $s_{165}\approx 1.498956$ من أجل $a=3, b=6$، و $s_{165}\approx 2.448071$ من أجل $a=2.5, b=4.5$، و $s_{165}\approx 2.928994$ من أجل $a=3, b=5$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\approx 0.78$ من أجل $a=4, b=10$، و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\approx 1.5$ من أجل $a=3, b=6$، و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\approx 2.45$ من أجل $a=2.5, b=4.5$، و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\approx 2.93$ من أجل $a=3, b=5$.



شكل 110.4: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 165\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$،

ملاحظة 25:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة تقَارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+3)\cdot(2n-1)!!}{(2n+2)\cdot(2n)!!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!\cdot(n+2)!}{((n+1)!)^2}, \quad \frac{3^2}{6^2} + \frac{3^2\cdot 5^2}{6^2\cdot 8^2} + \frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{6^2\cdot 8^2\cdot 10^2} + \dots$$

ادرس حسب قيم $x > 0$، تقَارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة الآتية:

$$1 + \frac{3}{7}x + \frac{3\cdot 6}{7\cdot 10}x^2 + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{7\cdot 10\cdot 13}x^3 + \dots$$

التمرين 106

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}.$$

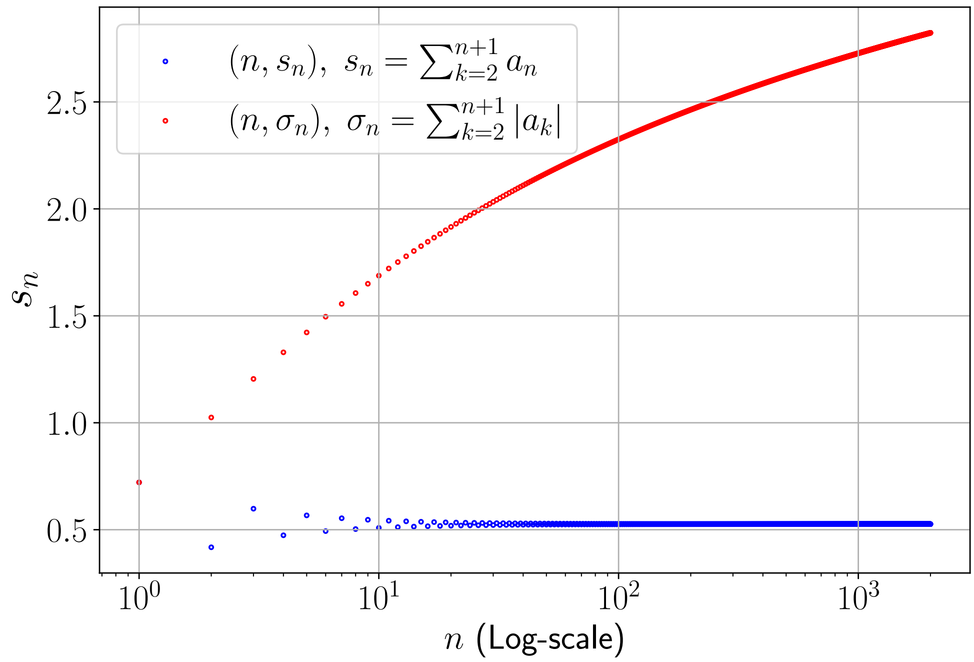
الحل: إنَّ متَسلسِلةَ القيم المطلقة لمتَسلسِلة المعطاة هي:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$$

وهي متَسلسِلة متباعِدة (انظر التمرين 40). إلا أنَّ المتَسلسِلةَ المعطاة متناوِبة. بوضع: $a_n := \frac{1}{n\ln(n)}$، نجد أنَّ:

$$a_{n+1} \leqslant a_n, \quad \forall n \geqslant 2.$$

كما أنَّ: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. وبالتَّالي فإنَّ المتَسلسِلة المعطاة متقارِبة حسب اختبار لايبنتز. والتَّقارُب شَرْطِي (انظر الشكل 111.4).



شكل 111.4: النقاط (n, s_n)، (n, σ_n) حيث $n \in \{2, 3, \dots, 2000\}$ و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$، $\sigma_n = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k\ln(k)}$.
في هذا الشكل لدينا $s_{2000} \approx 0.526379$، ومنه يمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n)} \approx 0.53$.

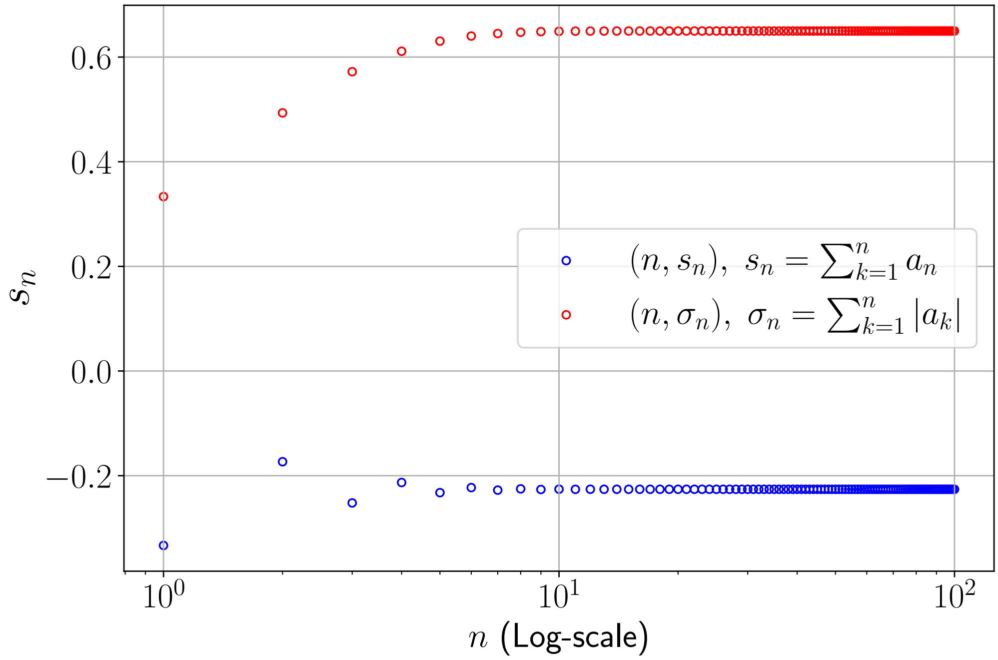
التمرين 107

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^n}{(2n+1)^n}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n^n}{(2n+1)^n}$، نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق حسب اختبار كُوشِي، فهي مُتَسَلْسِلَة مُتقَارِبَة (انظر الشكل 112،4).



شكل 112،4: النقاط (n, s_n)، (n, σ_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k^k}{(2k+1)^k}$، $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^k}{(2k+1)^k}$.
في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx -0.225985$، $\sigma_{100} \approx 0.649762$ ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^n}{(2n+1)^n} \approx -0.22$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n} \approx 0.65$

التمرين 108

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-2}}.$$

الحل: إنَّ مُتَسَلْسِلَة القيم المطلقة للمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة هي:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-2}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-2}}.$$

لنضع: $a_n = \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-2}}$، و $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\cancel{n}\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَتَانِ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ من طبيعة واحدة. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ مُتَبَاعِدَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ حيث $1 > \frac{1}{2} = p$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ مُتَبَاعِدَة. إلا أنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَنَاوِبَة. كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\cdot\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}} = 0.$$

و

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \quad - \quad a_n &= \frac{1+\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2-2}} - \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-2}} \\
&= \frac{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{(n+1)(n^2-2)}-\sqrt{(n+1)^2-2}-\sqrt{n(n+1)^2-2n}}{\sqrt{n^2-2}\cdot\sqrt{(n+1)^2-2}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n^2-2}-\sqrt{(n+1)^2-2}\right)+\left(\sqrt{n^3+n^2-2n-2}-\sqrt{n^3+2n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2-2}\cdot\sqrt{(n+1)^2-2}}.
\end{aligned}$$

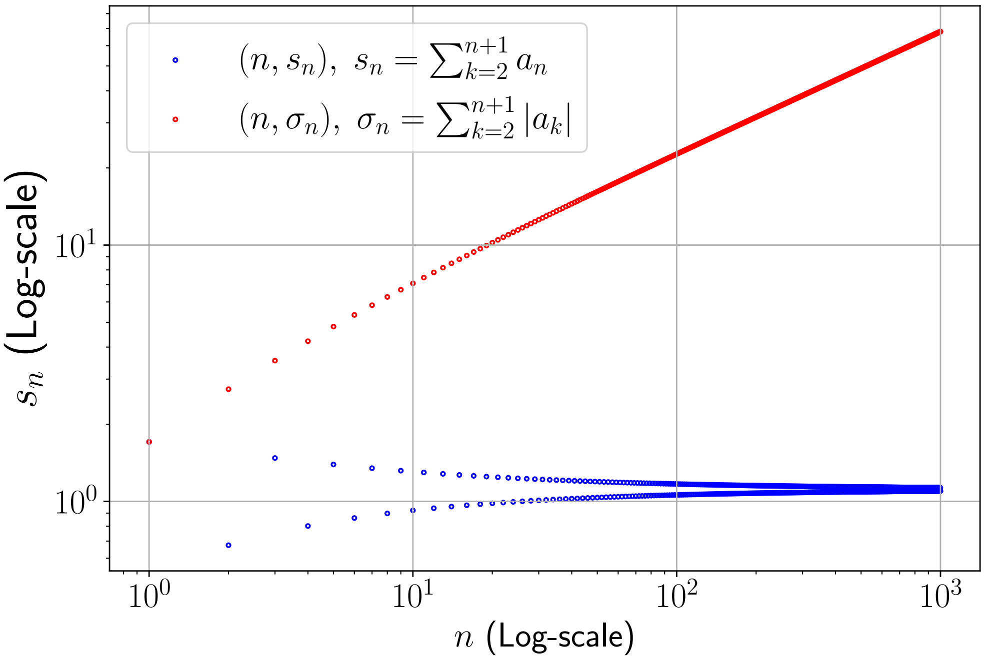
لكنَّ:

$$\sqrt{n^2-2}-\sqrt{(n+1)^2-2} < 0, \qquad \sqrt{n^3+n^2-2n-2}-\sqrt{n^3+2n^2-n} < 0.$$

ومنه فإنَّ:

$$a_{n+1} < a_n, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

وبالتَّالي فإنَّ فالمُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقَارِبَة حسب اختبار لايِبْنِتْز. والتَّقارُب شَرْطِي (انظر الشكل 113.4).



شكل 113.4: النقاط (n, s_n)، (n, σ_n) حيث $1 \leqslant n \leqslant 10^3$ و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k(1+\sqrt{k})}{\sqrt{k^2-2}}$، $\sigma_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1+\sqrt{k}}{\sqrt{k^2-2}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 1.098108$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-2}} \approx 1.1$.

التمرين 109

$$\frac{1}{2\cdot 2!} - \frac{1}{4\cdot 4!} + \frac{1}{6\cdot 6!} - \frac{1}{8\cdot 8!} + \ldots$$

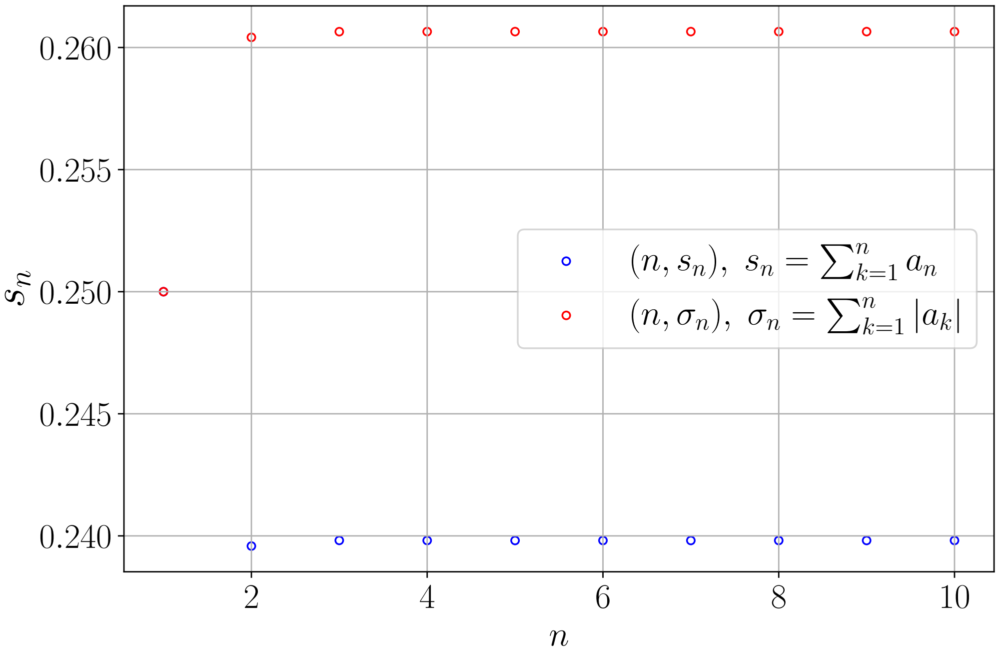
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)(2n)!}.$$

بوضع: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)(2n)!}$، نجد أنَّ:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+2}\cdot(2n)\cdot(2n)!}{(2n+2)\cdot(2n+2)!\cdot(-1)^{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(2n+2)^2\cdot(2n+1)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق حسب اختبار دَالامْبِير، فهي مُتَسَلْسِلَة مُتَقارِبَة (انظر الشكل 114.4).



شكل 114.4: النقاط (n, s_n)، (n, σ_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)(2k)!}$، $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)(2k)!}$.

في هذا الشكل لدينا $s_{10} \approx 0.239812$، $\sigma_{10} \approx 0.260651$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)(2n)!} \approx 0.24$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)(2n)!} \approx 0.26$.

التمرين 110

$$\frac{1}{10} - \frac{2}{3 \cdot 10^3} + \frac{2^2}{2! \cdot 5 \cdot 10^5} - \frac{2^3}{3! \cdot 7 \cdot 10^7} + \ldots$$

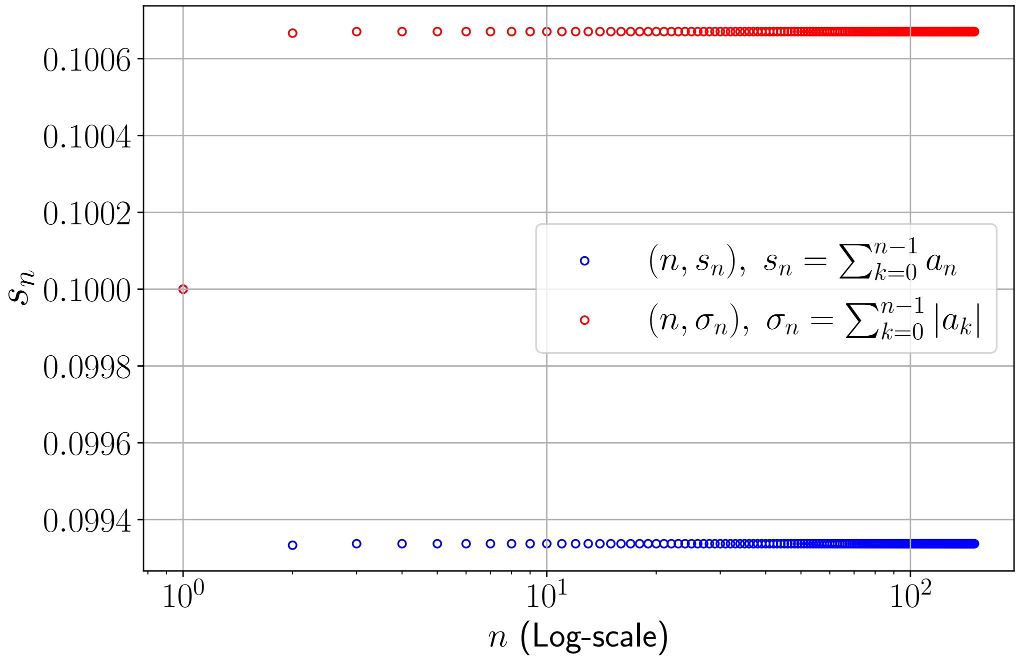
الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n! \cdot (2n+1) \cdot 10^{2n+1}}.$$

بوضع: $a_n = \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n! \cdot (2n+1) \cdot 10^{2n+1}}$، نجد أنَّ:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (2n+1) \cdot (n!) \cdot 10^{2n+1}}{(2n+3) \cdot (n+1)! \cdot 10^{2n+3} \cdot 2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{100(n+1)(2n+3)} = 0 < 1.
\end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق حسب اختبار دَالامْبِير، فهي مُتَسَلْسِلَة مُتَقارِبَة (انظر الشكل 115.4).



شكل 115.4: النقاط (n, s_n)، (n, σ_n) حيث $n \in \{0, 1, \dots, 150\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k! \cdot (2k+1) \cdot 10^{2k+1}}$، $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k! \cdot (2k+1) \cdot 10^{2k+1}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{150} \approx 0.099337$، $\sigma_{150} \approx 0.100671$. ومنه يمكننا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n! \cdot (2n+1) \cdot 10^{2n+1}} \approx 0.0993$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n! \cdot (2n+1) \cdot 10^{2n+1}} \approx 0.1007$.

ملاحظة 26:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلاَت الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{n^2 + 1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot \ln^2(n)}.$$

ادرس حسب قيم $x \in \mathbb{R}$، تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَة: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{2^n \cdot (3n-1)}$.

الفصل 5

حل تمارين المجموعة الثانية

في هذا الفصل سيتمُّ عرض حل التمارين التي تمَّ ذِكرُها في الفصل الثالث، بشكل مُقتَضب بحيث تبقى تفصيلات الحل من مهمة القارئ ليَتَسَنَّى له التَّدرُّب على الأفكار والمفاهيم المُتعلقَة بالتمارين التي يتمُّ حَلُّها.

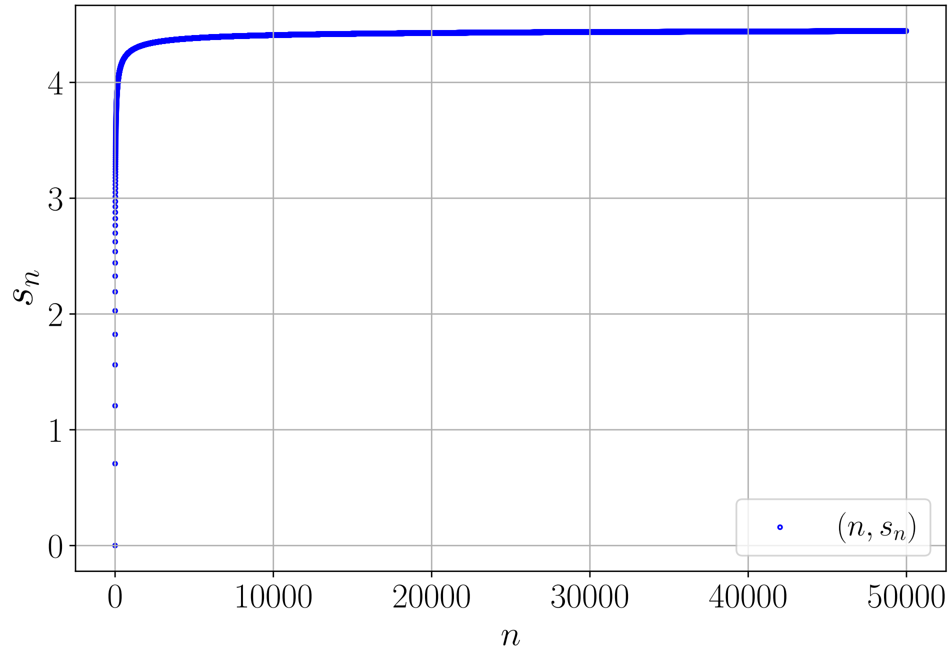
التمرين 111

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{n}}.$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{n}}$. إنَّ:

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n^{3/2}}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

وبما أنَّ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ مُتقارِبَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ) فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتقارِبَة (انظر الشكل 1.5).



شكل 1.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 50000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\sqrt{k}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{50000} \approx 4.443300777$، ومنه يمكننا التخمين بأنّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{n}} \approx 4.44$.

التمرين 112

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$، إنّ:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}}; \quad n \longrightarrow \infty,$$

ومنه نجد:

$$a_n \sim \frac{1}{n^{1/3} \cdot \sqrt{n+1}}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

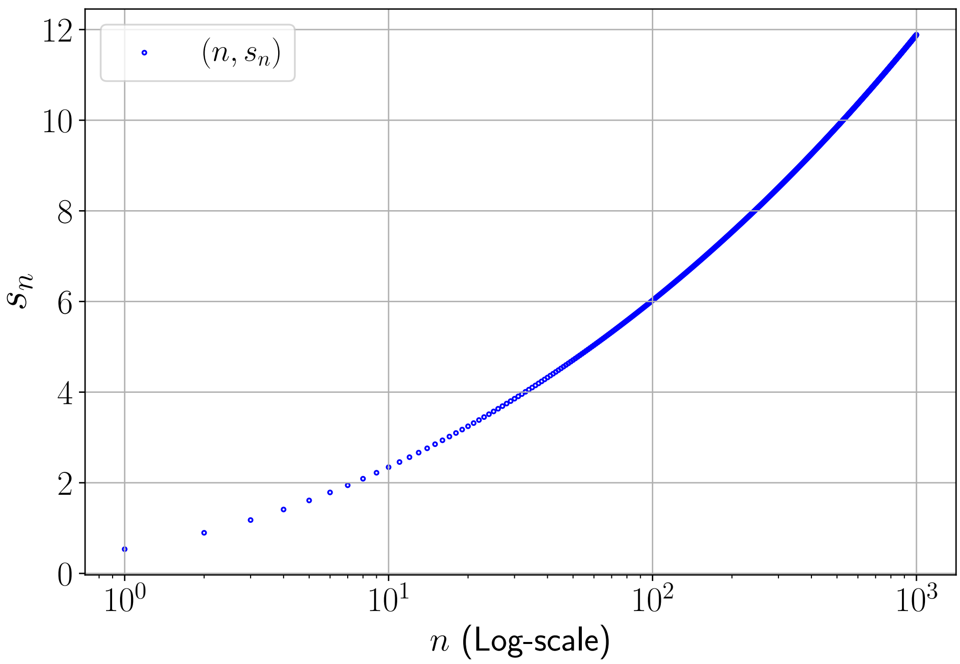
لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3} \cdot \sqrt{n+1}}$، إنّ:

$$b_n := \frac{1}{n^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}.$$

لنأخذ المُتَسَلْسِلَة المُتَبَاعِدَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ (مُتَسَلْسِلَة رِيمَان)، لنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\frac{1}{n^{5/6}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n^{5/6}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}}{\cancel{\frac{1}{n^{5/6}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتَبَاعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 2.5).



شكل 2.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

التمرين 113

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin^2(2n)}{\sqrt{n^5+3}}.$$

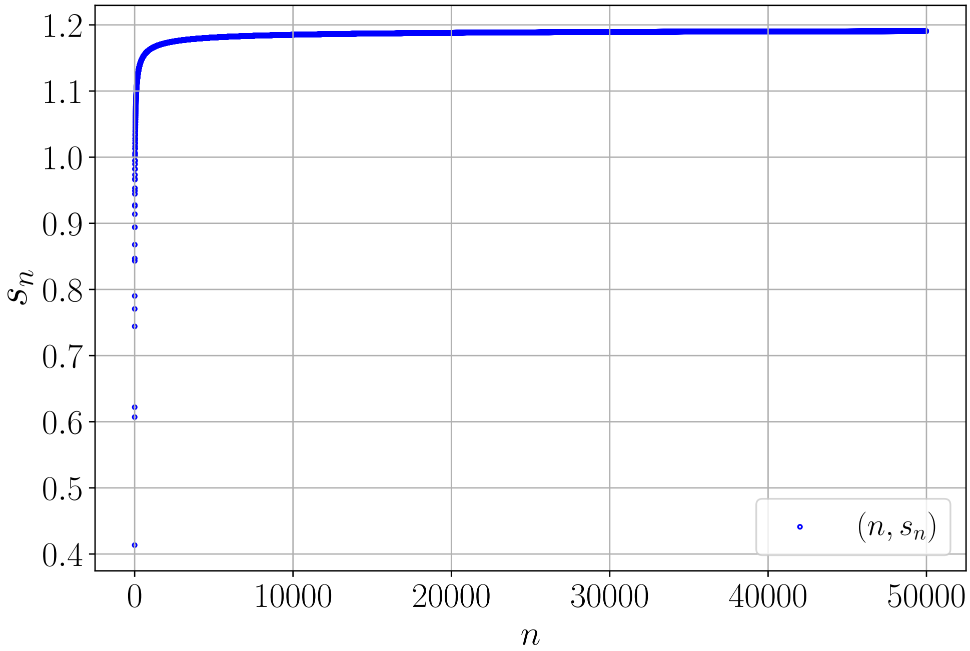
الحل: إنَّ:

$$a_n := \frac{n \sin^2(2n)}{\sqrt{n^5+3}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^5+3}}; \qquad \forall n \geqslant 1.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$. لنأخذ المُتَسَلْسِلَة المُتَقارِبَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ (مُتَسَلْسِلَة رِيْمَان)، لنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^{3/2}}{n^{5/2}\sqrt{1+\frac{3}{n^5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n^5}}} = 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$ مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (انظر الشكل 3.5).



شكل 3.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 50000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k\sin^2(2k)}{\sqrt{k^5+3}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{50000} \approx 1.190657133$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin^2(2n)}{\sqrt{n^5+3}} \approx 1.19$.

التمرين 114

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3\left(3-2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)}.$$

الحل: لنضع: $a_n := \frac{n^2+3}{n^3\left(3-2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)}$. إنَّ:

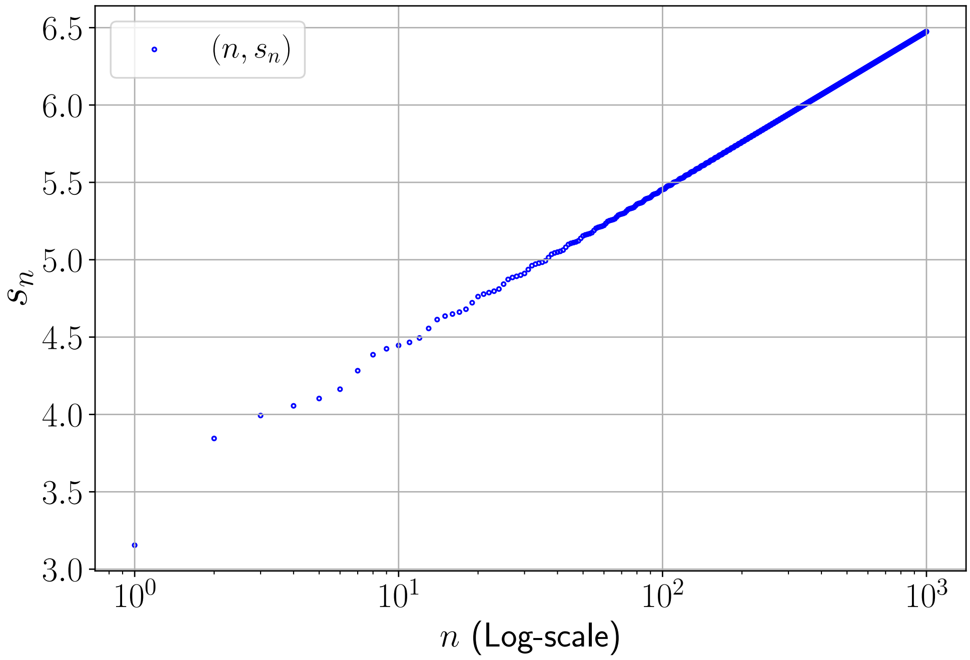
$$\sin(n\pi/3) \geqslant -1, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

ومنه: $a_n \geqslant \frac{n^3+3}{5n^3}$. لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{5n^3}$.

من أجل ذلك، لنأخذ المُتَسَلْسِلَة المُتَبَاعِدَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة)، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+3}{5n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n}{5n^3} = \frac{1}{5}.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{5n^3}$ مُتَبَاعِدَة حسب اختبار المُقَارَنة الثاني، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 4.5).



شكل 4.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+3}{k^3\left(3-2\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right)}$.

التمرين 115

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\sqrt{n+2}\right)}{n \ln^2(n+1)}.$$

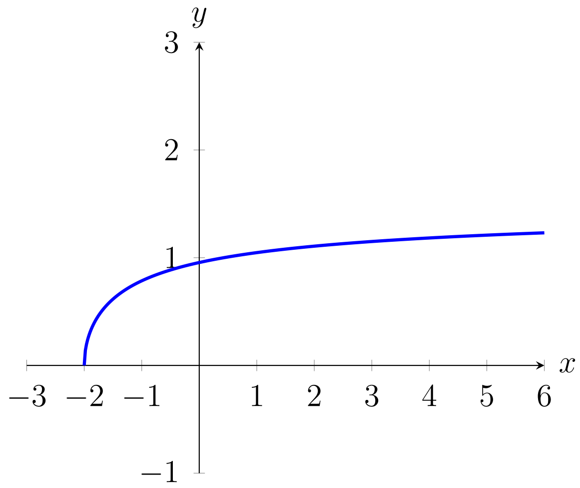
الحل: لنضع: $a_n := \frac{\arctan\left(\sqrt{n+2}\right)}{n\ln^2(n+1)}$. إنَّ الدَّالَّة $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x+2}\right)$ محدودة من الأعلى، من أجل كل $x \in [1, \infty[$. إذ إنَّ: $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan\left(\sqrt{x+2}\right) = \frac{\pi}{2}$ (انظر الشكل 5.5). ومنه يوجد $C \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\arctan\left(\sqrt{n+2}\right) \leqslant C; \quad \forall n \geqslant 1.$$

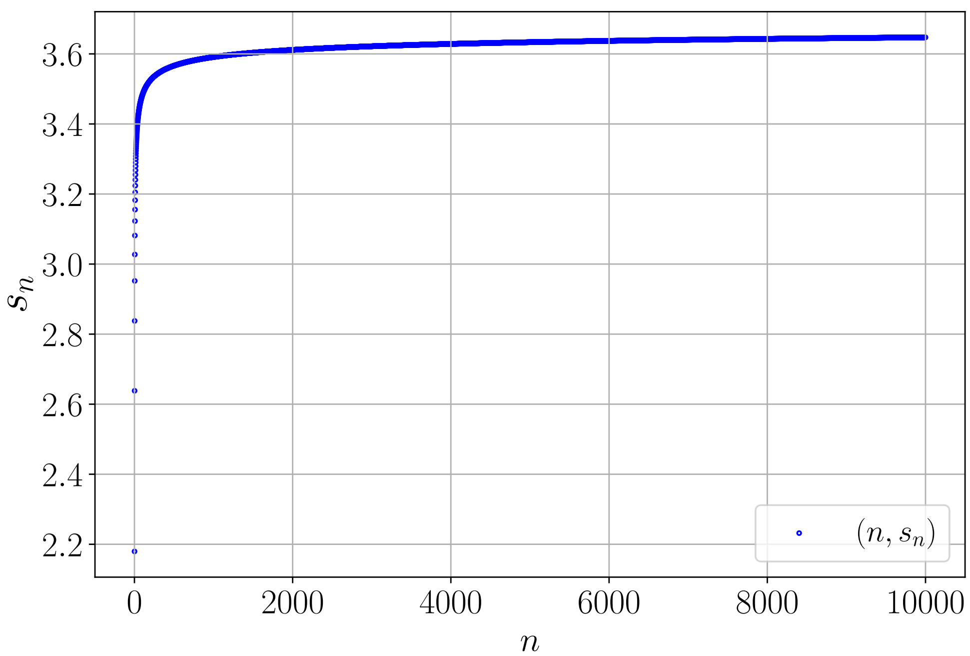
ومنه:

$$a_n \leqslant \frac{C}{n\ln^2(n+1)} \leqslant \frac{C}{n\ln^2 n}.$$

لكن المُتَسَلْسلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ مُتَقارِبَة (انظر التمرين 43). ومنه فإنَّ المُتَسلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (انظر الشكل 6.5).



شكل 5.5: الخط البياني للدَّالَّة $f(x) = \arctan(\sqrt{x+2})$.



شكل 6.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\arctan(\sqrt{k+2})}{k\ln^2(k+1)}$، في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 3.6472166277$، ومنه يمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(\sqrt{n+2})}{n\ln^2(n+1)} \approx 3.65$.

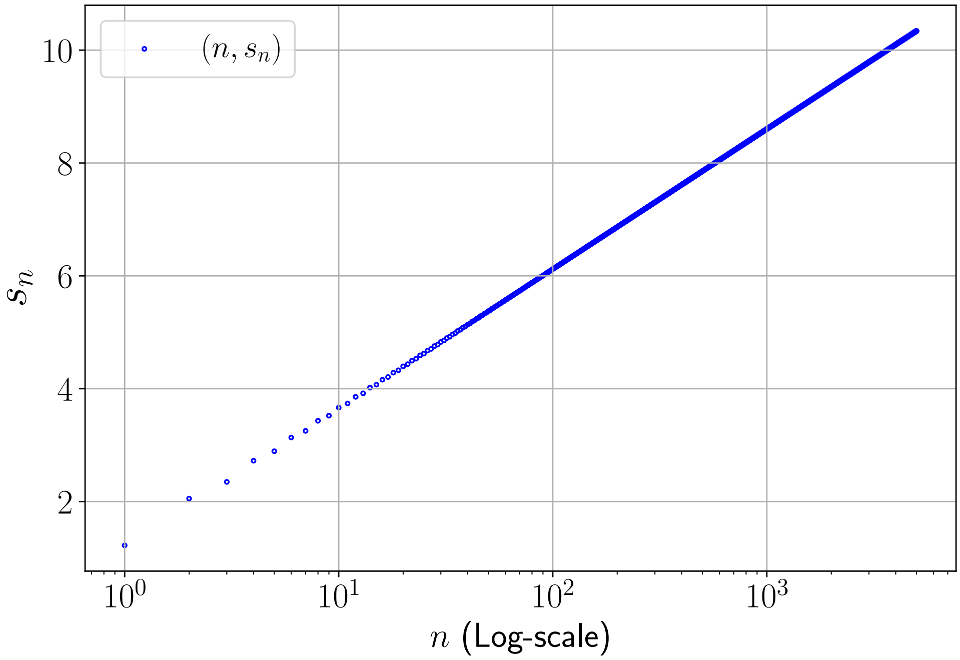
التمرين 116

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(3+2(-1)^n)}{\sqrt{n}} \cdot \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n := \frac{\arctan(3+2(-1)^n)}{\sqrt{n}} \cdot \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. إنَّ: $3 + 2(-1)^n = 5$ عندما يكون n عددًا زوجيًا، وعندما يكون n عددًا فرديًا فإنَّ $3 + 2(-1)^n = 1$. ومنه فإنَّ:

$$a_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}, \qquad n \to \infty.$$

وبما أنَّ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة) مُتَباعِدَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 7.5).



شكل 7.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

التمرين 117

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{n+1}{2n}\right)}{\sqrt[4]{3n^4+2}}.$$

الحل: إنَّ:

$$\arcsin\left(\frac{n+1}{2n}\right) \geqslant \frac{1}{2}; \qquad \forall n \geqslant 1,$$

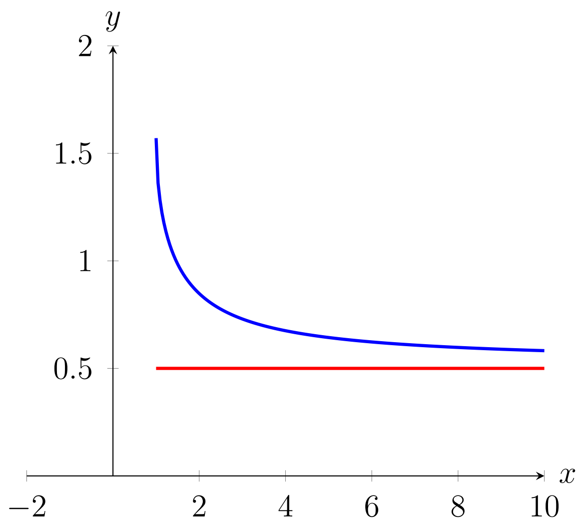
(انظر الشكل 8.5). ومنه:

$$\frac{\arcsin\left(\frac{n+1}{2n}\right)}{\sqrt[4]{3n^4+2}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt[4]{3n^4+2}}; \qquad \forall n \geqslant 1.$$

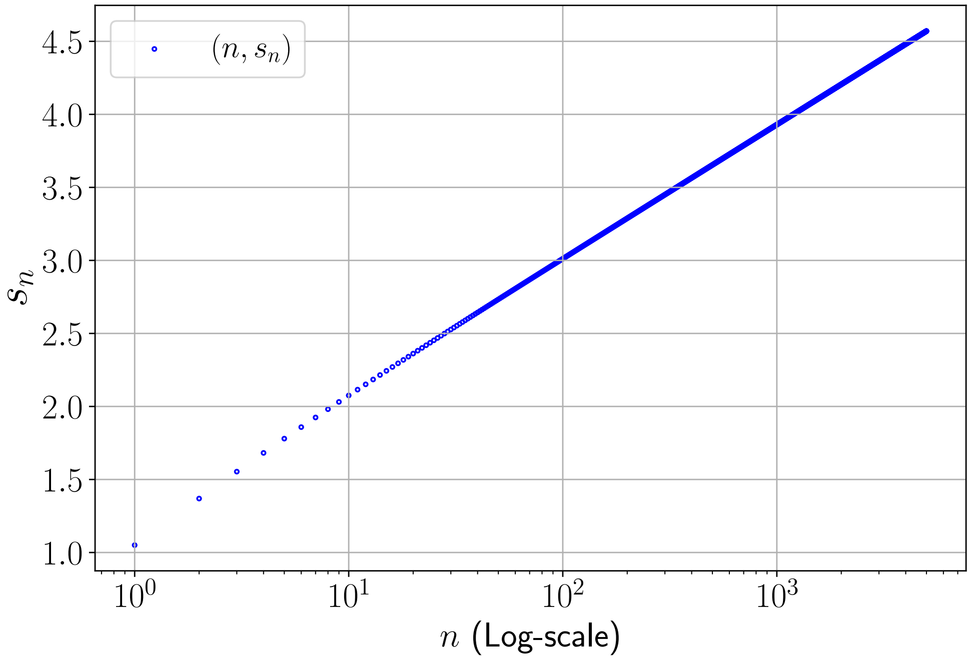
لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[4]{3n^4+2}}$. لنضع: $a_n := \frac{1}{2\sqrt[4]{3n^4+2}}$، ولنأخذ المُتَسَلْسِلَة المُتَباعِدَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة)، بوضع: $b_n := \frac{1}{n}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n} \cdot \sqrt[4]{3 + \frac{2}{n^4}}} = \frac{1}{2}.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[4]{3n^4+2}}$ مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 9.5).



شكل 8.5: الخط البياني للدَّالَّة $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{2x}\right)$.



شكل 9.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\arcsin\left(\frac{k+1}{2k}\right)}{\sqrt[4]{3k^4+2}}$.

التمرين 118

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}} - 1.$$

الحل: إنَّ:

$$e^x - 1 \sim x; \quad x \longrightarrow 0.$$

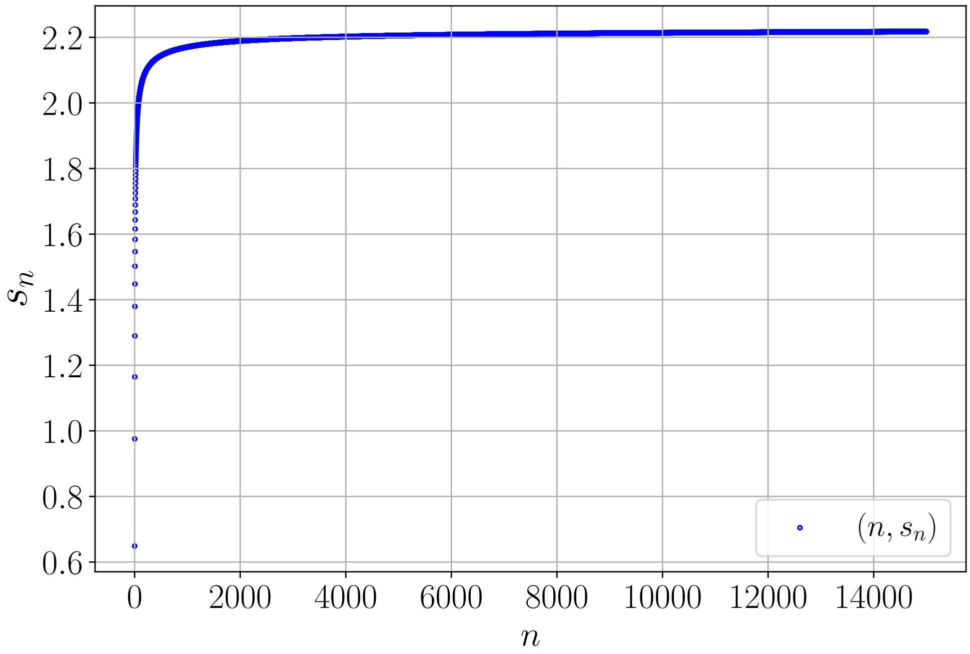
كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} = 0.$$

ومنه يمكن أن نكتب:

$$e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

إنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ مُتَقارِبَة (نقارن مع مُتَسَلْسِلَة رِيْمَانْ المُتَقارِبَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$). ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة (انظر الشكل 10.5).



شكل 10.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 15000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{\sqrt{k}}{k^2+1}} - 1$، في هذا الشكل لدينا $s_{15000} \approx 2.21756308$، كما أنَّ: $s_{10^6} \approx 2.2318927418$، $s_{10^7} \approx 2.2332602859$، $s_{10^8} \approx 2.2336927414$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}} - 1 \approx 2.23$.

التمرين 119

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} \ln\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n := \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} \ln\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)$، إنَّ:

$$\ln\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{3n+1}\right) \sim \frac{-2}{3n+1}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

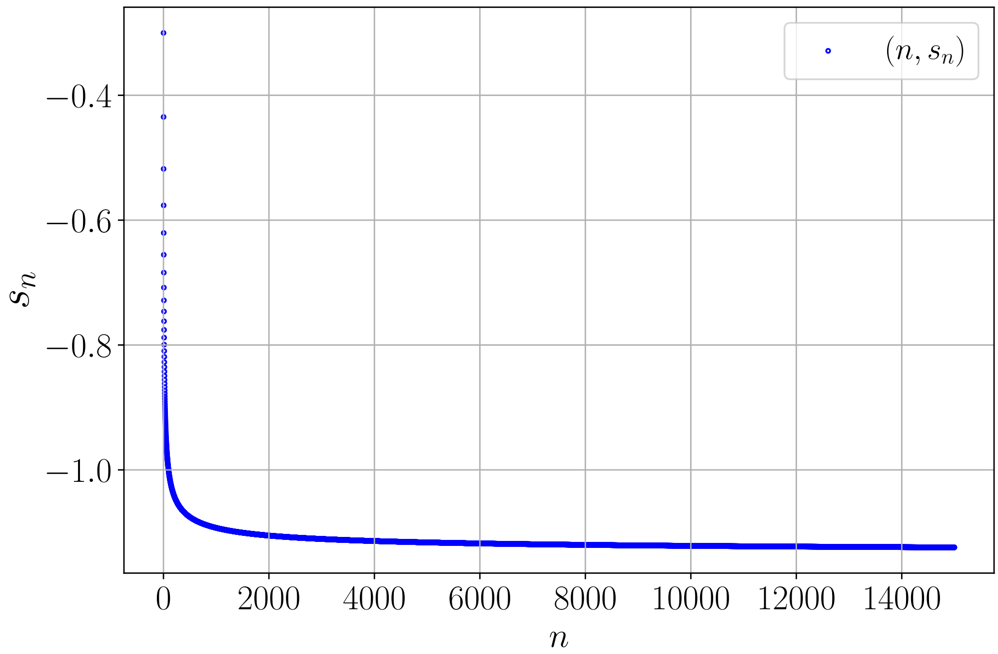
ومنه:

$$a_n \sim \frac{-2\sqrt{n+2}}{(n+3)(3n+1)} = \frac{-2\sqrt{n+2}}{3n^2+10n+3}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{(n+3)(3n+1)}$. لنأخذ المُتَسَلْسِلَة المُتَقارِبَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ)، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+2}}{(n+3)(3n+1)}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \cancel{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\cancel{n^2}\left(3+\frac{10}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{(n+3)(3n+1)}$ مُتقارِبة، وبالتّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبة (انظر الشكل 11،5).



شكل 11،5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 15000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$، في هذا الشكل لدينا: $s_{15000} \approx -1.1241182324$، كما أنَّ: $s_{10^6} \approx -1.1336708561$، $s_{10^7} \approx -1.1345825513$، $s_{10^8} \approx -1.1348708549$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \approx -1.13$.

التمرين 120

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\tfrac{1}{n}\right) - \arctan\left(\tfrac{1}{n}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n := \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$، إنَّ:

$$\tan x \sim x, \qquad \arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}; \qquad x \longrightarrow 0.$$

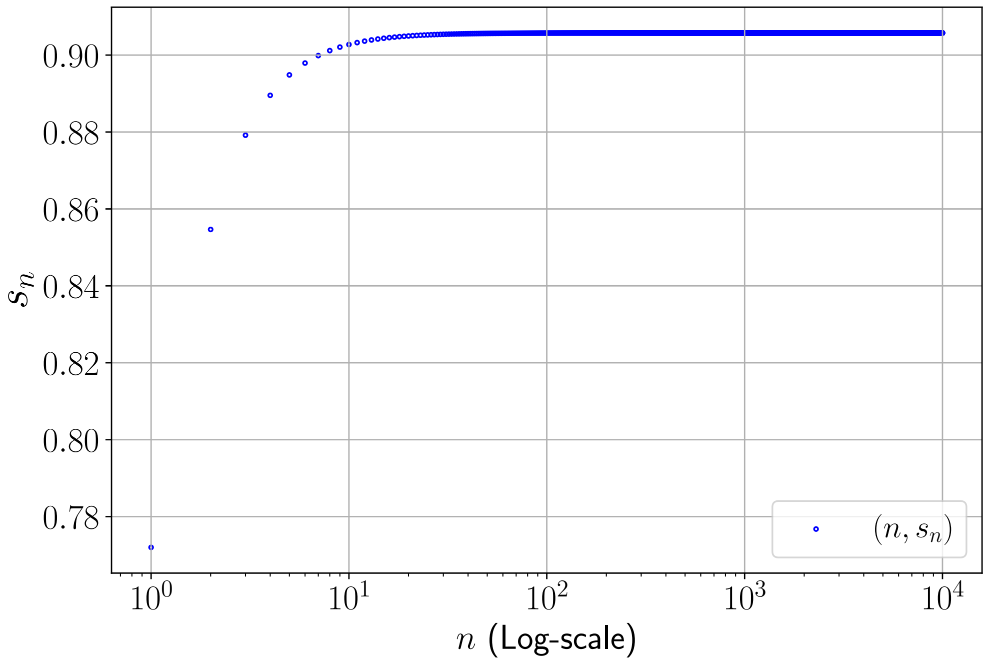
ومنه:

$$\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, \qquad \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3}; \qquad n \longrightarrow \infty.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$a_n \sim \frac{1}{3n^3}; \qquad n \longrightarrow \infty.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ مُتَقَارِبَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقَارِبَة (انظر الشكل 12.5).



شكل 12.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.9057584563$، ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.91$.

التمرين 121

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cos\left(\frac{1}{n!}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n := 3^n \cos\left(\frac{1}{n!}\right)$، إنَّ:

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}; \quad x \longrightarrow 0 \Longrightarrow \cos\left(\frac{1}{n!}\right) \sim 1 - \frac{1}{2(n!)^2}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

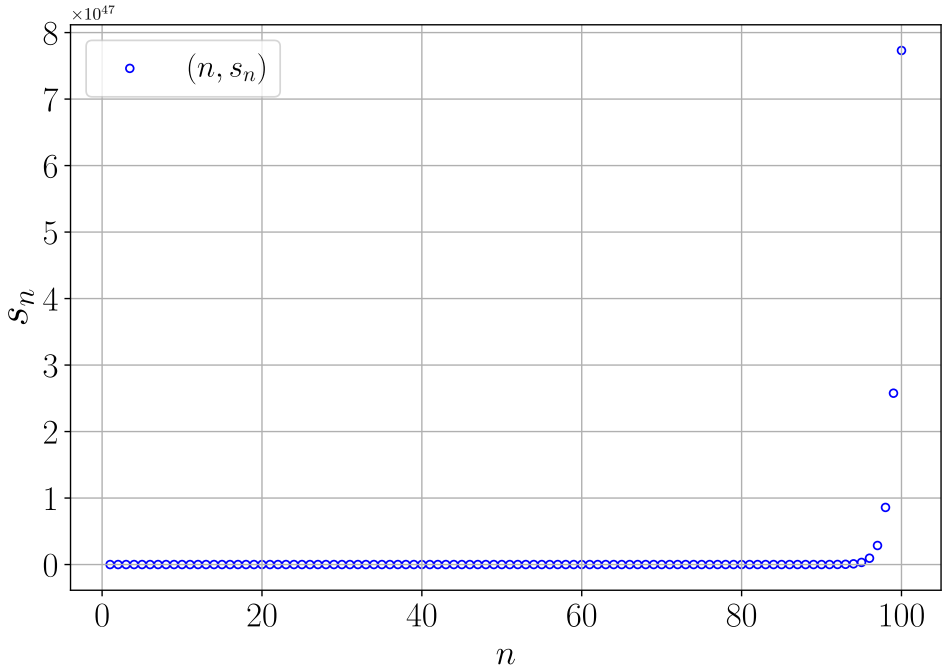
$$a_n \sim 3^n\left(1 - \frac{1}{2(n!)^2}\right); \quad n \longrightarrow \infty.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\left(1 - \frac{1}{2(n!)^2}\right)$. لنضع $b_n := 3^n\left(1 - \frac{1}{2(n!)^2}\right)$، ولنأخذ المُتَسَلْسِلَة

المُتَبَاعِدَة $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ (مُتَسَلْسِلَة هَندَسِيَّة أساسها يساوي 3)، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}\left(1-\frac{1}{2(n!)^2}\right)}{\cancel{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2(n!)^2}\right) = 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتَبَاعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطاة مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 13،5).



شكل 13،5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 3^k \cos\left(\frac{1}{k!}\right)$.

التمرين 122

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/n} \frac{x\sin^5 x}{1+x^2}dx.$$

الحل: إنَّ:

$$\frac{x\sin^5 x}{1+x^2} \leqslant \frac{x}{1+x^2}; \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right].$$

ومنه:

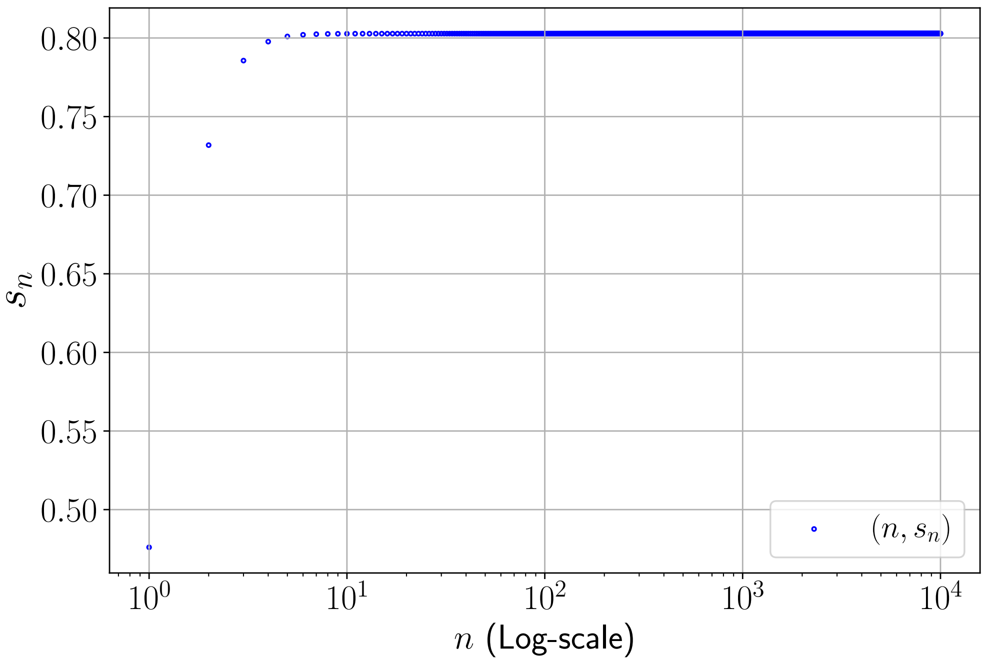
$$\int_0^{\pi/n} \frac{x\sin^5 x}{1+x^2}dx \leqslant \int_0^{\pi/n} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right).$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)$. لنأخذ المُتَسَلْسِلَة المُتَقارِبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{n^2}$ (مُتَسَلْسِلَة

رِيْمَانْ)، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)}{\frac{\pi^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)}{\frac{\pi^2}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)$ مُتَقَارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (انظر الشكل 14.5).



شكل 14.5: النقاط (n, s_n) حيث $n\in\{1,2,\ldots,10^4\}$ و $s_n=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/k}\frac{x\sin^5 x}{1+x^2}dx$، في هذا الشكل لدينا $s_{10^4}\approx 0.8027628632$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/n}\frac{x\sin^5 x}{1+x^2}dx\approx 0.803$.

التمرين 123

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}dx.$$

الحل: إنَّ:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}\leqslant\frac{x}{1+x^4},\qquad \forall x\in[1,\infty[,$$

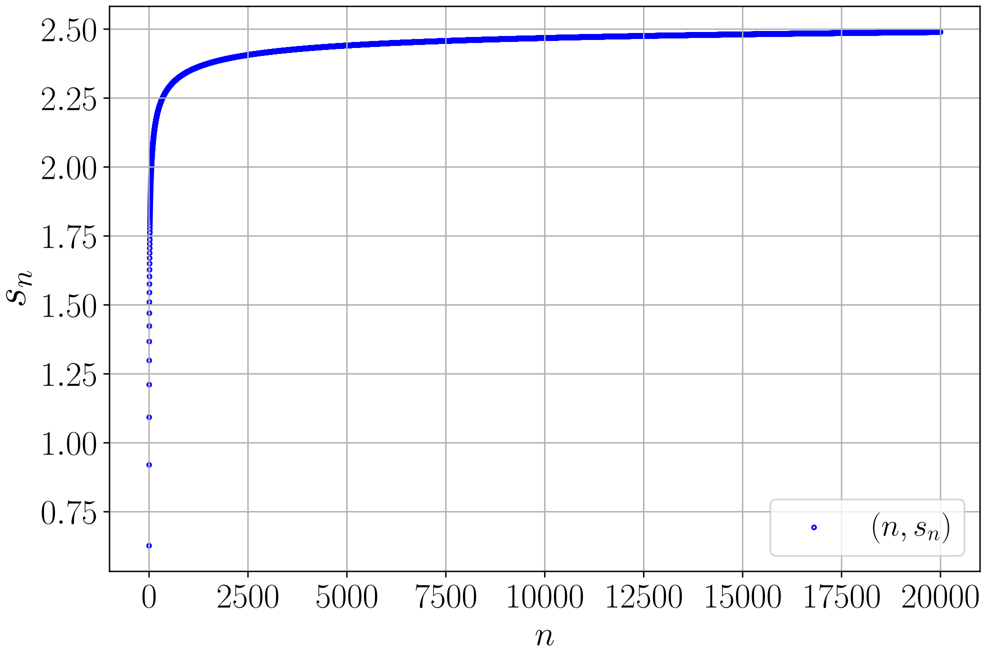
ومنه:

$$\int_0^{1/n}\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}dx\leqslant\int_0^{1/n}\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{1/n}\frac{2x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{1/n}\frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\arctan(x^2)\right]_0^{1/n}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$. نلاحظ أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنَة الثاني. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنَة الأول (انظر الشكل 15.5).



شكل 15.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 20000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_0^{1/k} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} dx$.

في الشكل 15.5 لدينا $s_{20000} \approx 2.48935128$. كما أنَّ: $s_{10^6} \approx 2.54974234$ و $s_{10^7} \approx 2.56179901$. ومنه يُمكِنُنا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} dx \approx 2.6$. لاحظ التَّقارب البطيء جداً للمتسلسِلَة المُعطَاة من القيمة التَّقريبيَّة لمجموعها.

التمرين 124

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan((-n)^n)}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}.$$

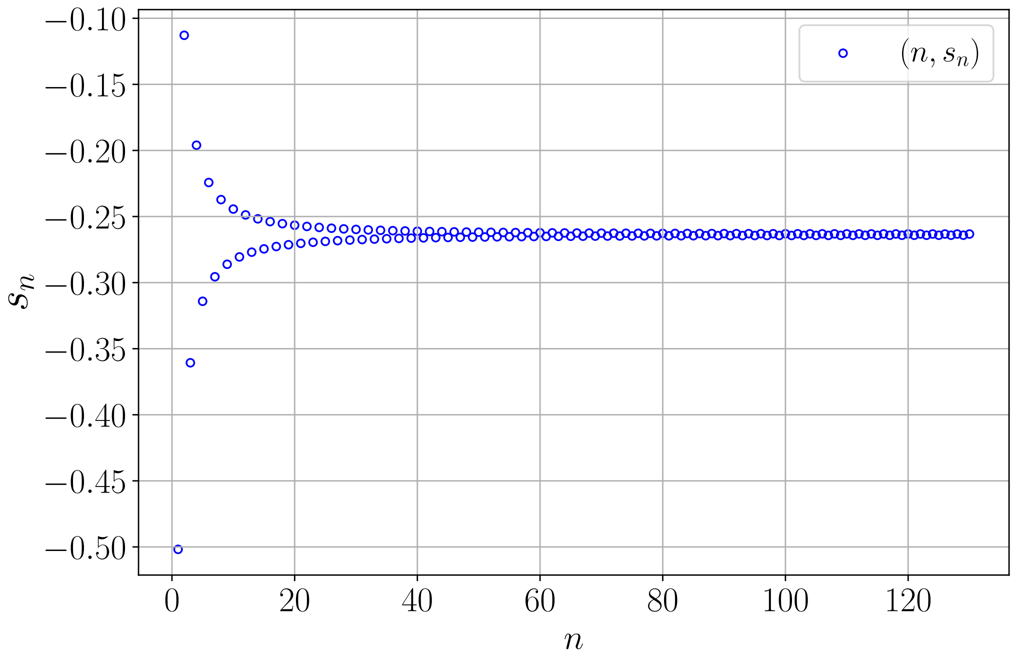
الحل: إنَّ: $|\arctan x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ لأجل كل $x \in \mathbb{R}$. ومنه:

$$\left|\frac{\arctan\left((-n)^n\right)}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

لنضع: $a_n := \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$، ولنأخذ المُتَسلسِلَة المُتَقارِبَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ (مُتَسَلسِلَة رِيمَانْ)، لنضع: $b_n := \frac{1}{n^{3/2}}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi \cdot n^{3/2}}{2\sqrt[4]{2n^6+3n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi \cdot \cancel{n^{\frac{3}{2}}}}{2\cancel{n^{3/2}}\sqrt[4]{2+\frac{3}{n^5}+\frac{1}{n^6}}} = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2}}.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسلسِلَة المُعطاة مُتَقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 16.5).



شكل 16.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 130\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\arctan((-k)^k)}{\sqrt[4]{2k^6+3k+1}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{130} \approx -0.2632409631$، ومنه يُمكِنُنا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan((-n)^n)}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}} \approx -0.36$.

التمرين 125

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{2^n}.$$

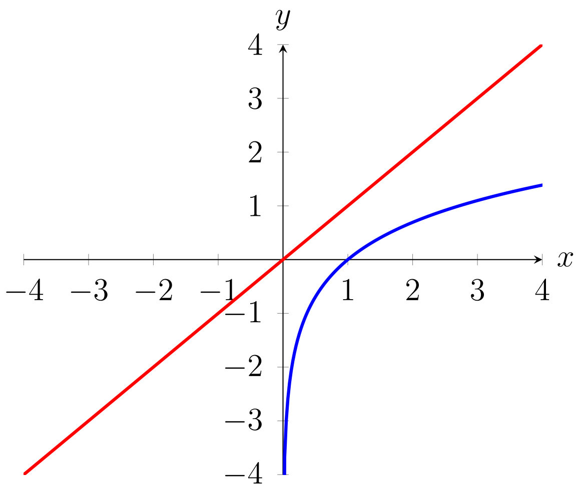
الحل: إنَّ: $\ln n \leqslant n\ (\forall n \geqslant 1)$، (انظر الشكل 17.5). ومنه:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{2^n}\right| = \frac{\ln^2 n}{2^n} \leqslant \frac{n^2}{2^n}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

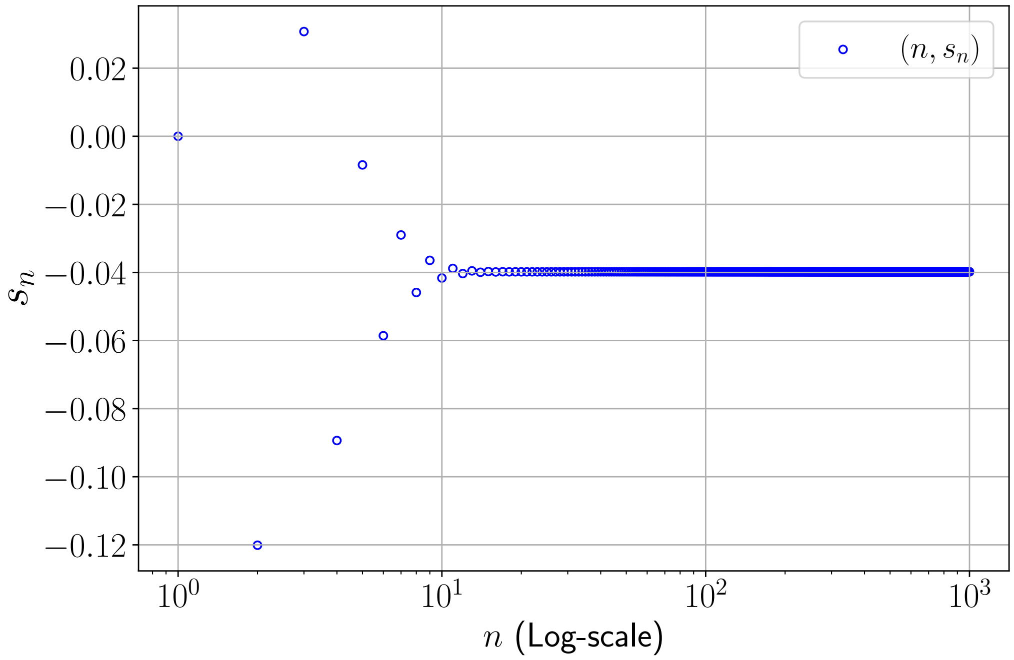
لندرس طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$. لنضع $b_n=\frac{n^2}{2^n}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2\cdot\cancel{2^n}}\cdot\frac{\cancel{2^n}}{n^2}=\frac{1}{2}<1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 18.5).



شكل 17.5: الخطَّان البَيانِيَّان للدَّالَّتيْن: $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=x$.



شكل 18.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} \ln^2 k}{2^k}$، في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx -0.0398057275$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln^2 n}{2^n} \approx -0.04$.

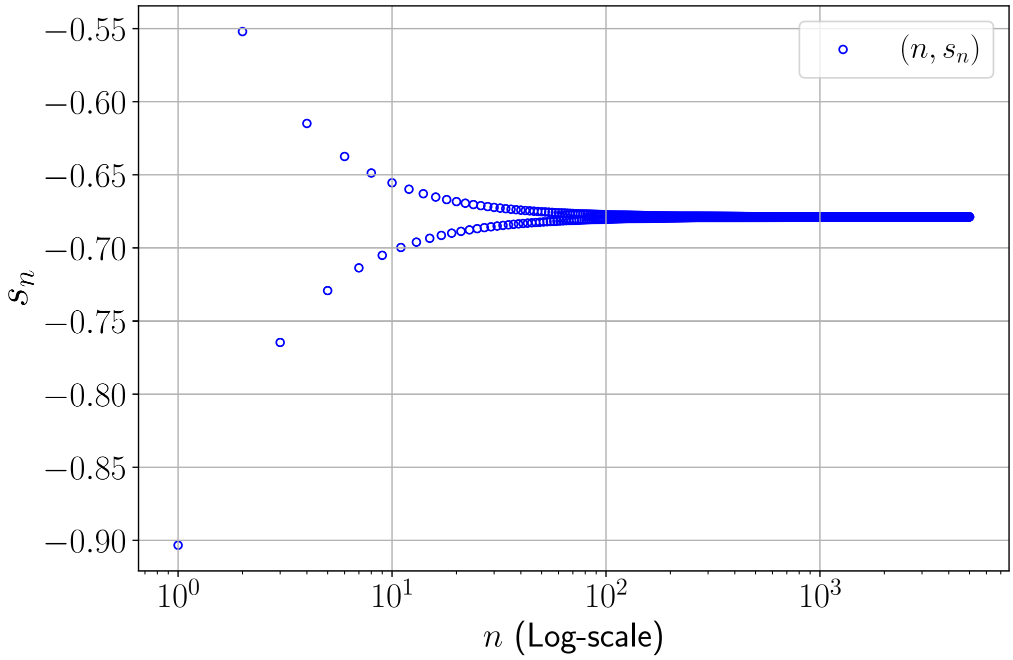
التمرين 126

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin\left(\frac{\pi}{4n}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin\left(\frac{\pi}{4n}\right)$، إنَّ:

$$|a_n| = \frac{\arcsin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt[5]{n}} \sim \frac{\pi}{4n \cdot \sqrt[5]{n}} = \frac{\pi}{4n^{6/5}}, \qquad n \longrightarrow \infty.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4n^{6/5}}$ مُتقارِبَة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَانْ)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 19.5).



شكل 19.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{5000} \approx -0.678773117$. ومنه يُمكِنُنا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \approx -0.68$.

التمرين 127

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \arctan\left(\tfrac{n+1}{n^3+2}\right).$$

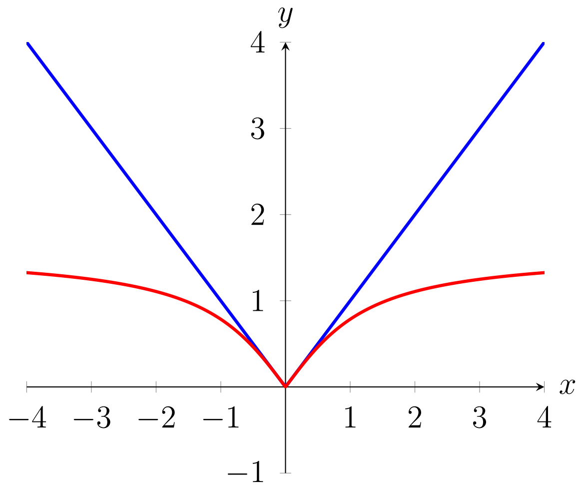
الحل: لنضع: $a_n := \cos^3 n \cdot \arctan\left(\frac{n+1}{n^3+2}\right)$. إنَّ:

$$|\arctan x| \leqslant |x|; \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

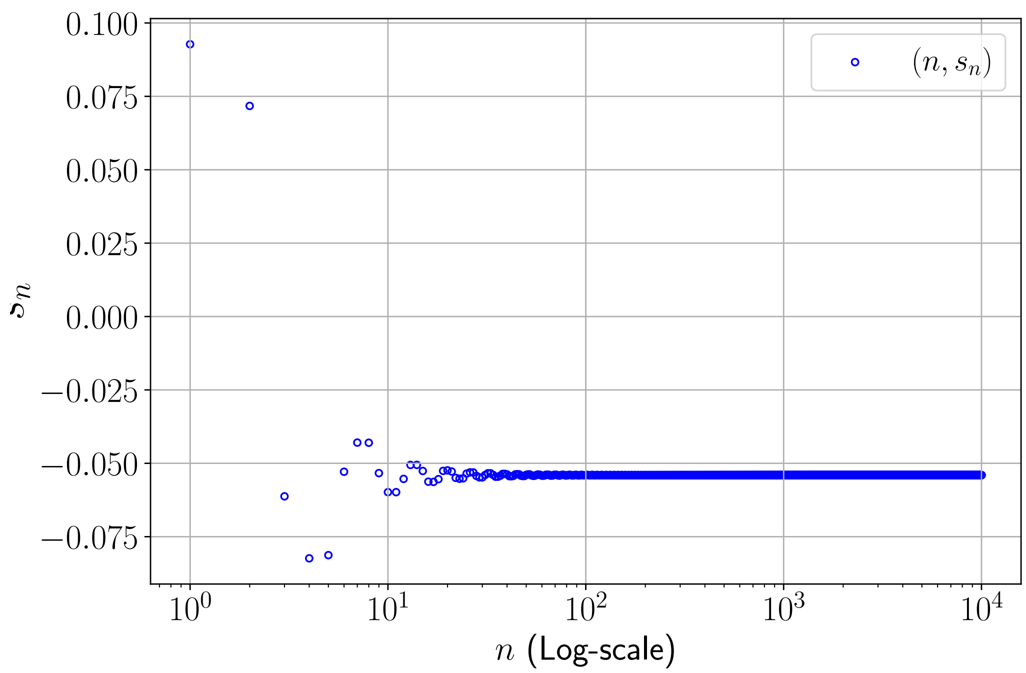
(انظر الشكل (20.5)). ومنه:

$$\left|\cos^3 n \cdot \arctan\left(\frac{n+1}{n^3+2}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{n^3+2}; \qquad \forall n \geqslant 1.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2}$. مُتَقارِبَة (حسب اختبار المُقارَنة الثاني مع مُتَسَلْسِلَة رِيْمان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 21.5).



شكل 20.5: الخطّان البيانيّان للدّالّتيْن: $f_1(x) = |x|, f_2(x) = |\arctan x|$.



شكل 21.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx -0.0540335939$. ومنه يمكِننا التّخمين بأنّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx -0.054$.

التمرين 128

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n := \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$، إنَّ:

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2}; \quad x \longrightarrow 0.$$

وبما أنَّ: $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$، فإنَّنا نجد:

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

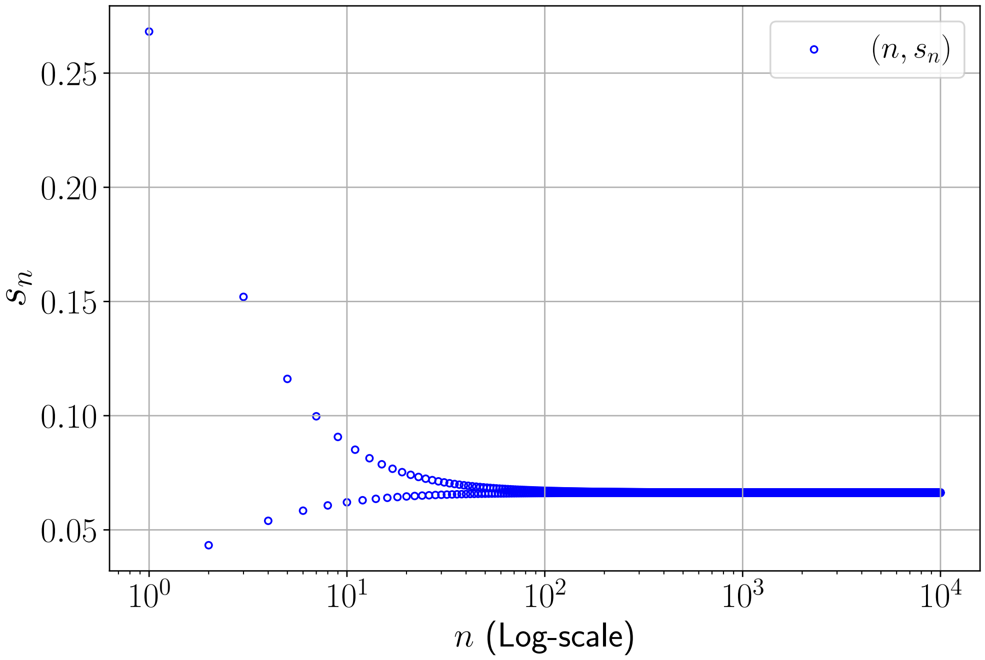
ومنه، عندما $n \longrightarrow \infty$، نجد أنَّ:

$$\begin{aligned} |a_n| &\sim \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \cdot \left|\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2}\right| \leqslant \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \cdot \frac{2n+1}{2n^2} = \frac{\cancel{n} \cdot \sqrt{1+\frac{3}{n^2}} \cdot \cancel{n} \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1+\frac{4}{n^2}} \cdot 2\cancel{n^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}} \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)}{2n^{3/2} \cdot \sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} := b_n. \end{aligned}$$

لنضع: $c_n := \frac{1}{n^{3/2}}$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}} \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 22.5).



شكل 22.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{2,3,\dots,10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=2}^{n+1} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.0662991072$. ومنه يمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=2}^{\infty} a_n \approx 0.07$.

التمرين 129

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right).$$

الحل: لنضع: $a_n := \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)$. إنَّ:

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}; \qquad \forall n \geqslant 1.$$

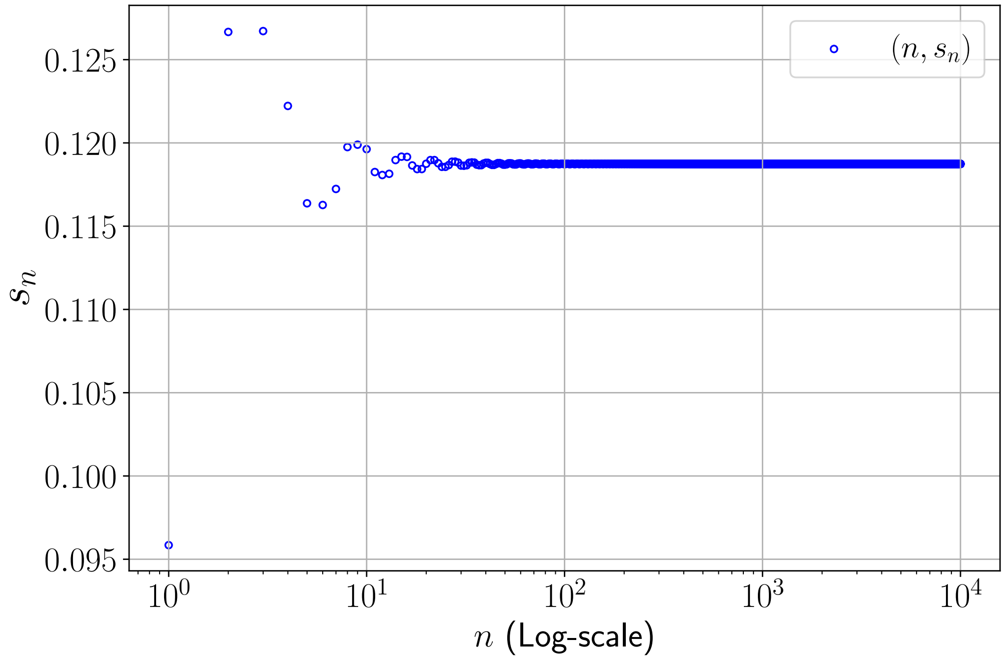
وبما أنَّ: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$، فإنَّ: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$. كما أنَّ:

$$x - \sin x \sim x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = \frac{x^3}{3!}; \qquad x \longrightarrow 0.$$

ومنه:

$$\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \sim \frac{1}{3!}\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{\sin^3 n}{n^2}; \qquad n \longrightarrow \infty.$$

لكن: $\left|\frac{\sin^3 n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$، والمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ مُتَقارِبَة. ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n}{n^2}$ مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق حسب اختبار المُقارَنة الأول، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 23.5).



شكل 23.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا: $s_{10^4} \approx 0.118738233$، ومنه يمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.1187$.

التمرين 130

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \sin(1/n)} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right) \cos(n\pi).$$

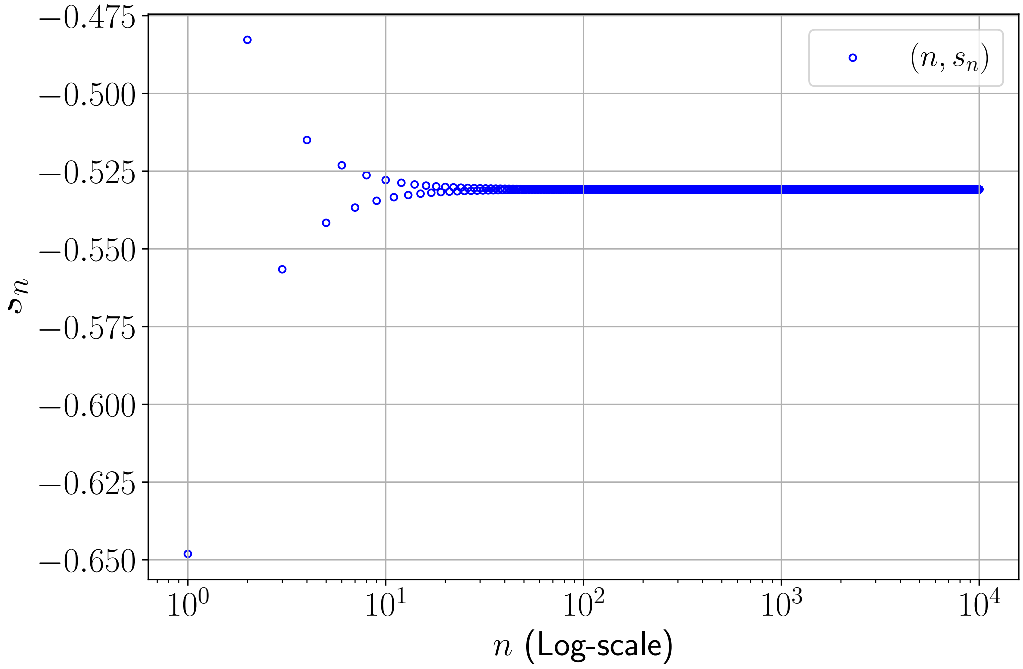
الحل: لنضع: $a_n := \left(\frac{1}{n \sin(1/n)} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right) \cos(n\pi)$ إنَّ:

$$\sin x \sim x; \quad x \longrightarrow 0, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}; \quad x \longrightarrow 0.$$

ومنه:

$$\begin{aligned} |a_n| \leqslant \left| \frac{1}{n \sin(1/n)} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right| &\sim \frac{1}{n(1/n)} - \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right); \quad n \longrightarrow \infty \\ &= \frac{1}{2n^2}; \quad n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقارِبَة فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 24.5).



شكل 24.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$، في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx -0.5308641228$، ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx -0.53$.

التمرين 131

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

الحل: لنضع: $a_n := (-1)^n \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$، إنَّ:

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right); \qquad \forall n \geqslant 1.$$

(انظر الشكل (25.5)) ومنه:

$$|a_n| = \left| \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \ \forall n \geqslant 1.$$

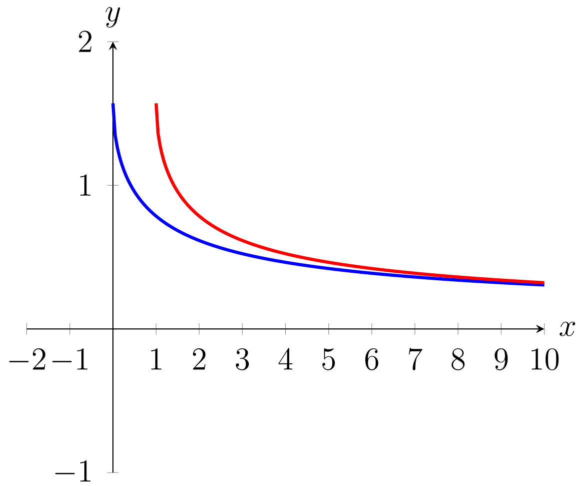
نعلم أن:

$$\arcsin x \sim x + \frac{x^3}{6}, \quad x \longrightarrow 0, \quad \arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}, \quad x \longrightarrow 0.$$

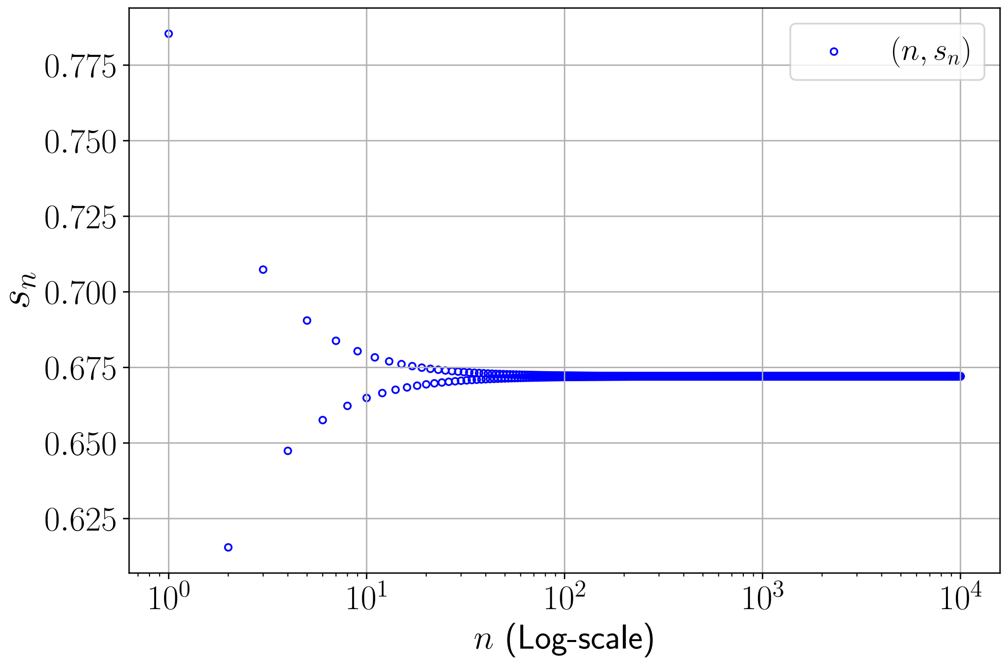
ومنه فإنَّ:

$$|a_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{6\left(\sqrt{n}\right)^3} - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3\left(\sqrt{n}\right)^3} \right) = \frac{1}{2n^{3/2}}; \qquad n \longrightarrow \infty.$$

وبما أنَّ المُتَسلسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ مُتَقارِبَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (وبالإطْلَاق) (انظر الشكل 26.5).



شكل 25.5: الخطَّان البَيانِيَّان للدَّالَّتيْن: $f_2(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$، $f_1(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.



شكل 26.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.672064795485$. ومنه يُمكِنُنا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.67$.

التمرين 132

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}}.$$

الحل: لنضع: $a_n := \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$. إنَّ:

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}} \leqslant \frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+2)}}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة الآتية، ذات الحدود الموجبة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+2)}}.$$

لنأخذ الدَّالَّة:

$$f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}^+;\qquad f(x)=\frac{1}{(x+2)\sqrt{\ln^3(x+2)}}.$$

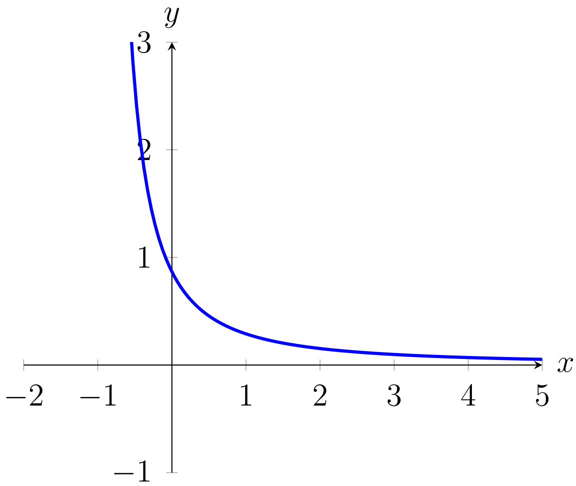
إن الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[1,+\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{\ln^3(x+2)}+\frac{3}{2}\sqrt{\ln(x+2)}}{(x+2)^2\ln^3(x+2)} < 0, \qquad \forall x\in[1,+\infty[.$$

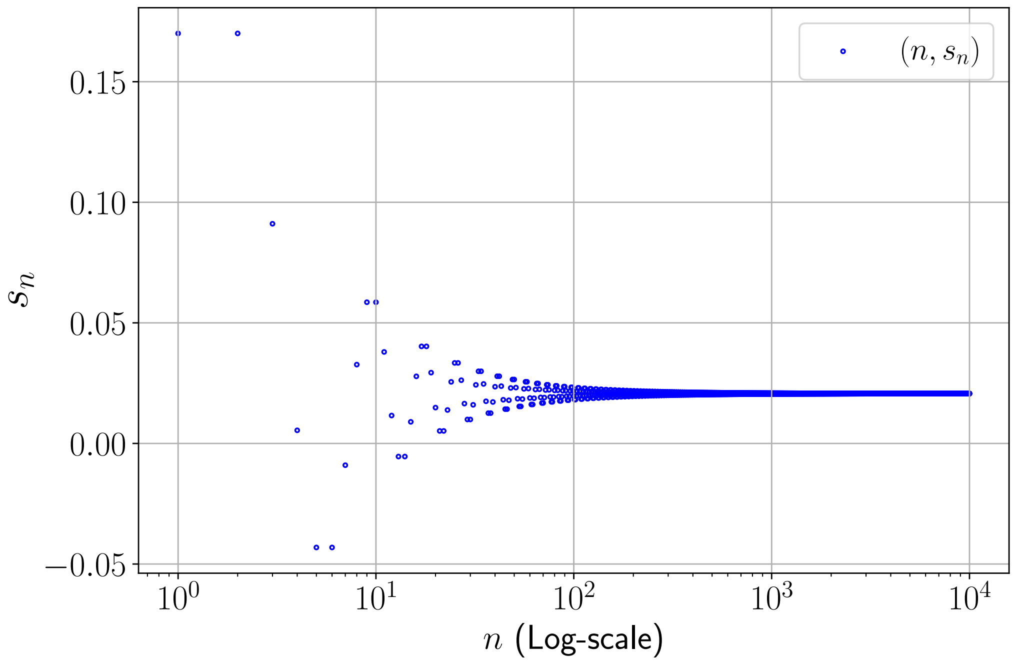
ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحقَّقة (انظر الشكل 27.5). كما أنَّ:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x)dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln^3(x+2)}}\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b (\ln(x+2))^{-3/2}d(\ln(x+2))\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{\ln(x+2)}}\right]_1^b = \frac{2}{\sqrt{\ln 3}}.\end{aligned}$$

ومنه فإنَّ التَّكامُل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ مُتقَارِب، فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+2)}}$ مُتقَارِبَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقَارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 28.5).



شكل 27.5: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x)=\frac{1}{(x+2)\sqrt{\ln^3(x+2)}}$ ضمن المجال $]-1,\infty[$.



شكل 28.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.0206834766$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.02$.

التمرين 133

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(3n)}{n \ln(n+1) \ln^2(n+2)}.$$

الحل: لنضع: $a_n := \frac{(-1)^n \sin(3n)}{n\ln(n+1)\ln^2(n+2)}$، إنَّ:

$$\begin{aligned}
|a_n| &\leqslant \frac{1}{n\ln(n+1)\ln^2(n+2)}\\
&= \frac{1}{n\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^2}\\
&= \frac{1}{n\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\left[\ln^2 n+\ln^2\left(1+\frac{2}{n}\right)+2\ln n\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]}\\
&< \frac{1}{n\ln^3 n}.
\end{aligned}$$

(انظر الشكل 29.5). لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$، ذات الحدود الموجبة. لنأخذ الدَّالَّة:

$$f:[2,+\infty[\to\mathbb{R}^+;\qquad f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}.$$

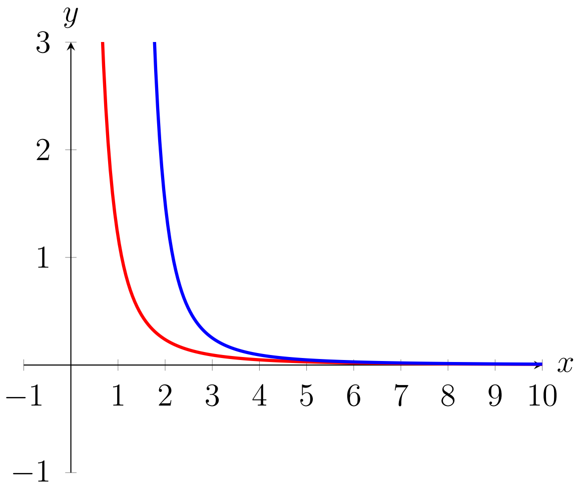
إن الدَّالَّة f مستمرة على المجال $[2,+\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = -\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x}{x^2\ln^6 x}<0,\qquad \forall x\in[2,+\infty[.$$

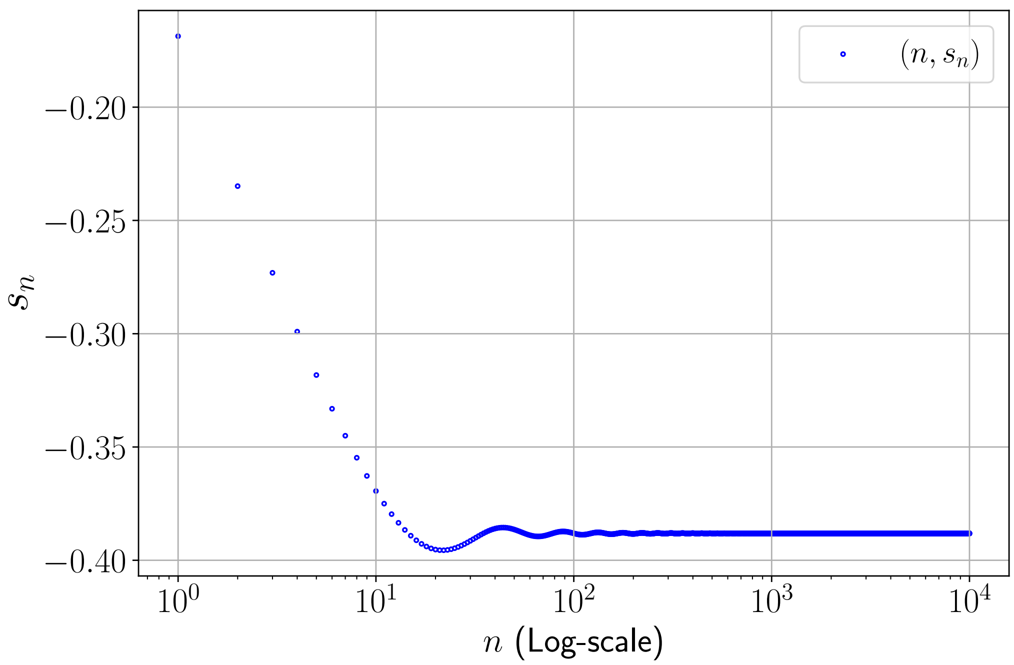
ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي مُحقَّقة. كما أنَّ:

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \ln^{-3}x\cdot\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{2\ln^2 x}\right]_2^b = \frac{1}{2\ln^2 2}.$$

ومنه فإنَّ التَّكامُل $\int_2^{\infty} f(x)dx$ مُتقَارِب، فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$ مُتقَارِبَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقَارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 30.5).



شكل 29.5: الخط البياني للدَّالَّة: $f_1(x) = \frac{1}{x\ln^3 x}$ ضمن المجال $]1,\infty[$، وللدَّالَّة $f_2(x) = \frac{1}{x\ln(x+1)\ln^2(x+2)}$ ضمن المجال $]0,\infty[$. لاحظ أن الدَّالَّة f_1 في جوار العدد 1 تسعى إلى $+\infty$ بسرعة كبيرة جدًا، وبالمثل الدَّالَّة f_2 في جوار الصفر. لذلك فإنَّه لا يمكن أن تظهر على الرَّسم قيم كل من f_1 و f_2 في جواري 1 و 0، على الترتيب.



شكل 30.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx -0.38813165$. ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx -0.39$.

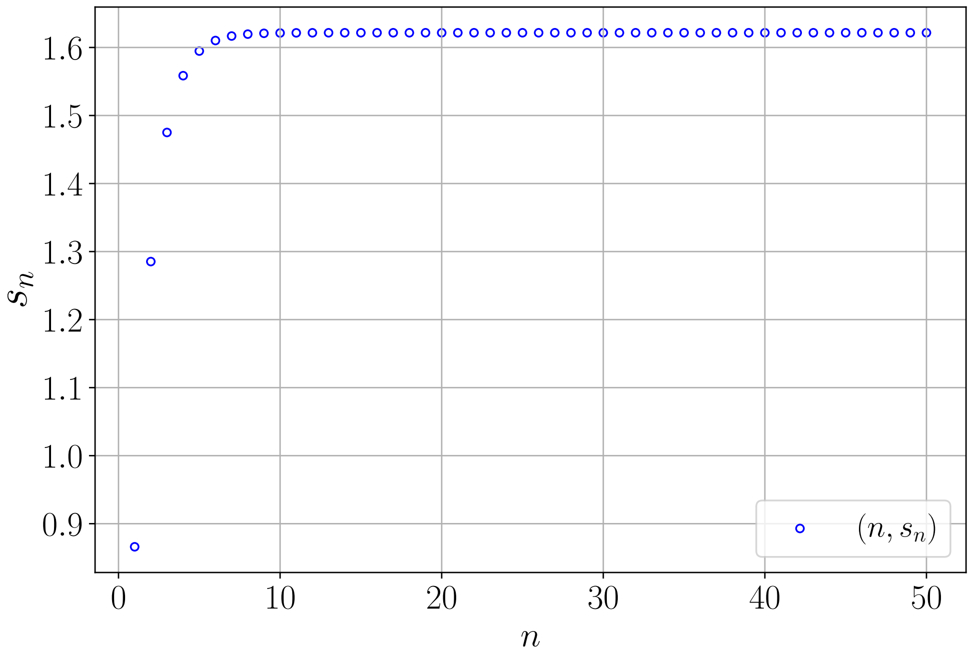
التمرين 134

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}}.$$

الحل: بوضع: $a_n = \sqrt{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}}$، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(3n+3)!}{(2n+2)^{3n+3}} \cdot \frac{(2n)^{3n}}{(3n)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)^3} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n}} \\
&= \sqrt{\frac{27}{8e^3}} \approx 0.4 < 1.
\end{aligned}$$

حيث أنَّ: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n} = \frac{1}{e^3}$ (تَحَقَّقْ من ذلك!). وبالتَّالي فإنَّ فالمُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقَارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 31.5).



شكل 31.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 50\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{(3k)!}{(2k)^{3k}}}$، في هذا الشكل لدينا $s_{50} \approx 1.6216442$، ومنه يمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}} \approx 1.62$.

التمرين 135

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+4}}{n! \cdot 10^{\frac{n}{2}}} \arctan(1+n^2).$$

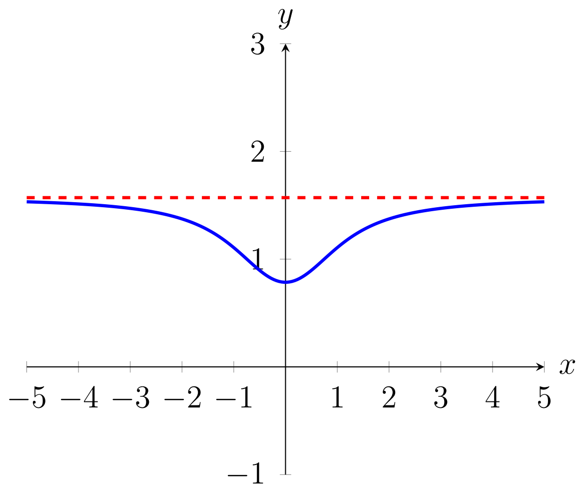
الحل: لنضع: $a_n := \frac{n^{n+4}}{n!\cdot 10^{\frac{n}{2}}} \arctan(1+n^2)$، إنَّ: $\arctan(1+n^2) < \frac{\pi}{2}$، مهما يكن $n \geqslant 1$ (انظر الشكل 32.5). ومنه:

$$a_n = \frac{n^{n+4}}{n!\cdot 10^{\frac{n}{2}}} \arctan(1+n^2) < \frac{\pi \cdot n^{n+4}}{2(n!)\cdot 10^{\frac{n}{2}}}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

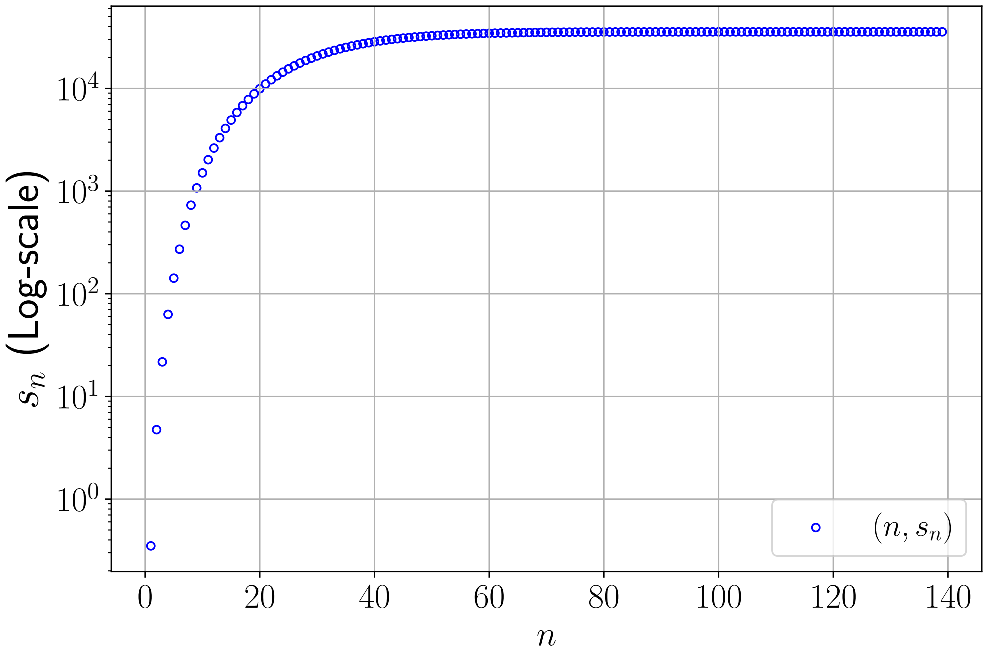
بوضع: $b_n := \frac{\pi \cdot n^{n+4}}{2(n!)\cdot 10^{\frac{n}{2}}}$، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\pi\cdot(n+1)^{n+5}}{2\cdot(n+1)!\cdot 10^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{2\cdot n!\cdot 10^{\frac{n}{2}}}{\pi\cdot n^{n+4}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+4} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right] = \frac{e}{\sqrt{10}} \approx 0.86 < 1.
\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتَقَارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 33.5).



شكل 32.5: الخط البياني للدَّالَّة $f(x) = \arctan(1+x^2)$ والمستقيم $y = \frac{\pi}{2}$.



شكل 33.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 139\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{139} \approx 35581.374$. ومنه يمكننا التخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 35581.37$.

التمرين 136

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi^n \cdot n!}.$$

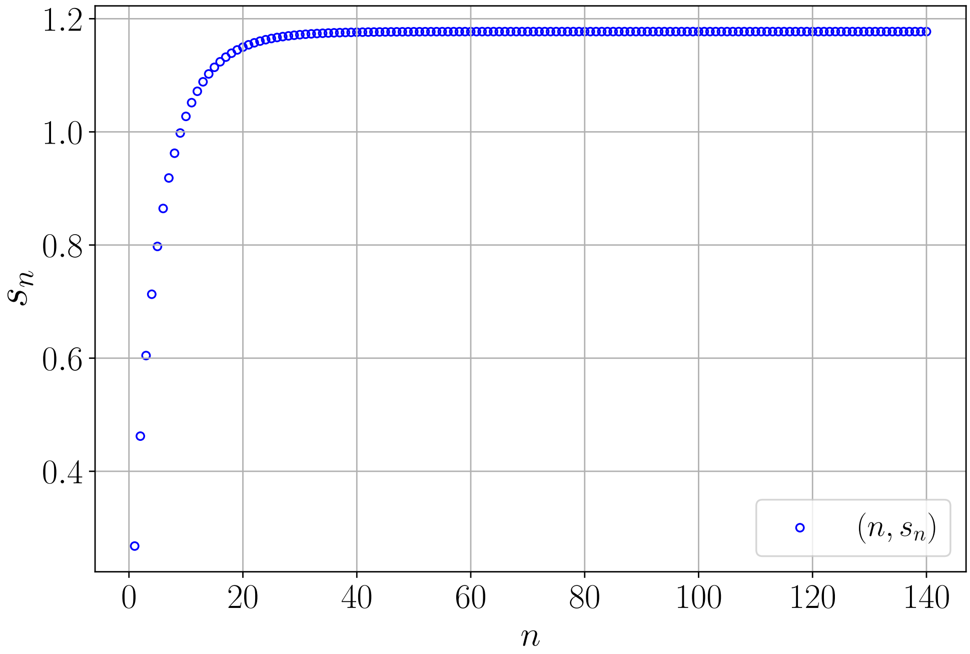
الحل: إنَّ:

$$\left| \frac{n^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi^n \cdot n!} \right| \leqslant \frac{n^{n+1}}{\pi^n \cdot n!}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

بوضع: $a_n = \frac{n^{n+1}}{\pi^n \cdot n!}$، نجد:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{n+2}}{\pi^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{\pi^n \cdot n!}{n^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\pi}.$$

ومنه: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\pi} < 1$. وبالتّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 34.5).



شكل 34.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 140\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{k+1}\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\pi^k \cdot k!}$، في هذا الشكل لدينا $s_{140} \approx 1.1772547$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi^n \cdot n!} \approx 1.78$.

التمرين 137

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot \sin\left(7^{-n}\right)}{n! \cdot (2n)!}.$$

الحل: إنَّ:

$$\sin(x) \sim x; \quad x \longrightarrow 0 \Longrightarrow \sin\left(7^{-n}\right) \sim 7^{-n}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

ومنه فإنَّ:

$$\frac{(3n)! \cdot \sin\left(7^{-n}\right)}{n! \cdot (2n)!} \sim \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot 7^n}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

من أجل المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot 7^n}$. بوضع: $a_n = \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot 7^n}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(3n+2)(3n+1)}{14(n+1)(2n+1)} = \frac{27}{28} < 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبة حسب اختبار دَالامْبِيرْ، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة.

ومن أجل المجموع لهذه المُتَسَلْسِلَةَ، حسب www.wolframalpha.com فإنَّ:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(3k)! \cdot \sin\left(7^{-k}\right)}{k! \cdot (2k)!} = 3.73953.$$

وبرمجيًا باستخدام Python 3.10.7، كما في التمارين السابقة والأشكال المرتبطة بها، فإنَّنا نجد أنَّ: $s_{56} \approx 3.54608$. وعند حساب s_{57} فإنَّه سيكون هناك حاجة لحساب $(3 \times 57)! = 171!$ وفي Python 3.10.7 لدينا $170! = 7.257415615307999 \times 10^{306}$ وهو عدد كبير يتجاوز حدود إمكانية تخزين الأعداد في الأنظمة التي تستخدم 64-bit.

التمرين 138

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \arctan(n)}{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot n!}.$$

الحل: إنَّ:

$$\arctan(n) \geqslant 1, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

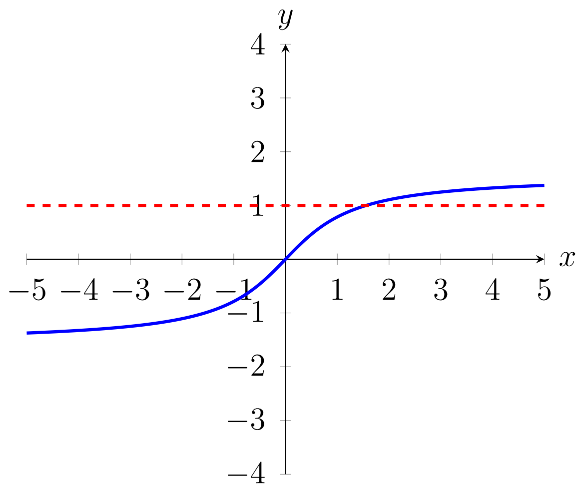
(انظر الشكل 35.5). ومنه فإنَّ:

$$\frac{n^n \arctan(n)}{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot n!} \geqslant \frac{n^n}{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot n!}, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

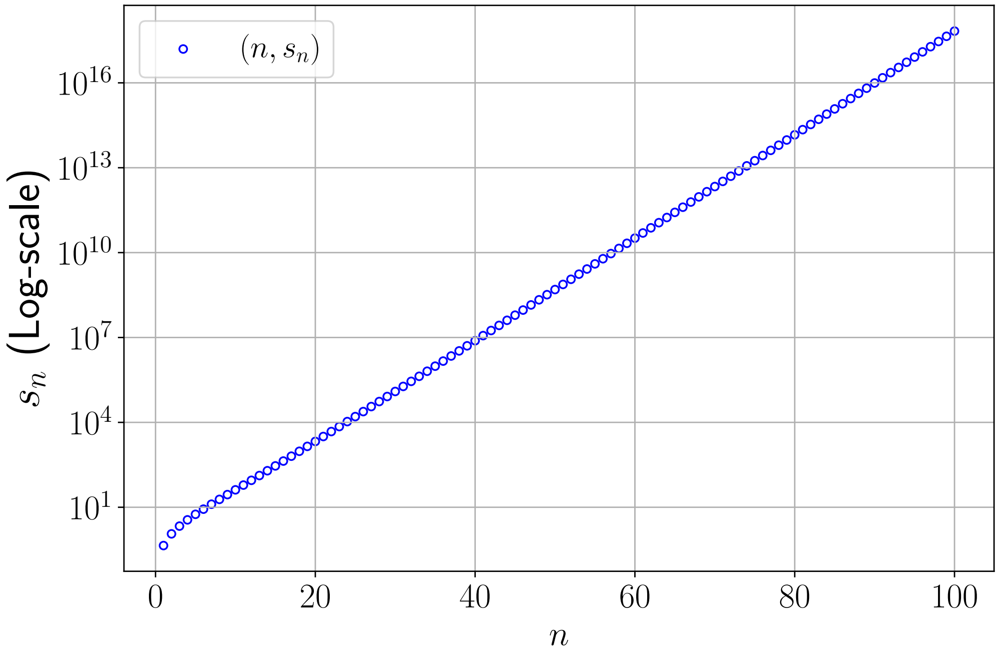
من أجل المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot n!}$. بوضع: $a_n = \frac{n^n}{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot n!}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{\sqrt{\pi}} \approx 1.53 > 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ مُتَباعِدَة حسب اختبار دَالامْبِيْر. والمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار المُقارَنة الأول (انظر الشكل 36.5).



شكل 35.5: الخط البياني للدَّالَّة $f(x) = \arctan(x)$ والمستقيم $y = 1$.



شكل 36.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^k \arctan(k)}{\pi^{\frac{k}{2}} \cdot k!}$.

التمرين 139

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n \cdot (n!)^2 \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}.$$

الحل: إنَّ:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2); \quad x \longrightarrow 0, \\
\Longrightarrow \cos\left(\frac{1}{n}\right) &= 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad n \longrightarrow \infty, \\
\Longrightarrow \cos\left(\frac{1}{n}\right) &\sim 1 - \frac{1}{2n^2}; \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

كما أنَّ:

$$\begin{aligned}
\ln(1 - x) &= -x + o(x); \quad x \longrightarrow 0, \\
\Longrightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right); \quad n \longrightarrow \infty, \\
\Longrightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) &\sim -\frac{1}{2n^2}; \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

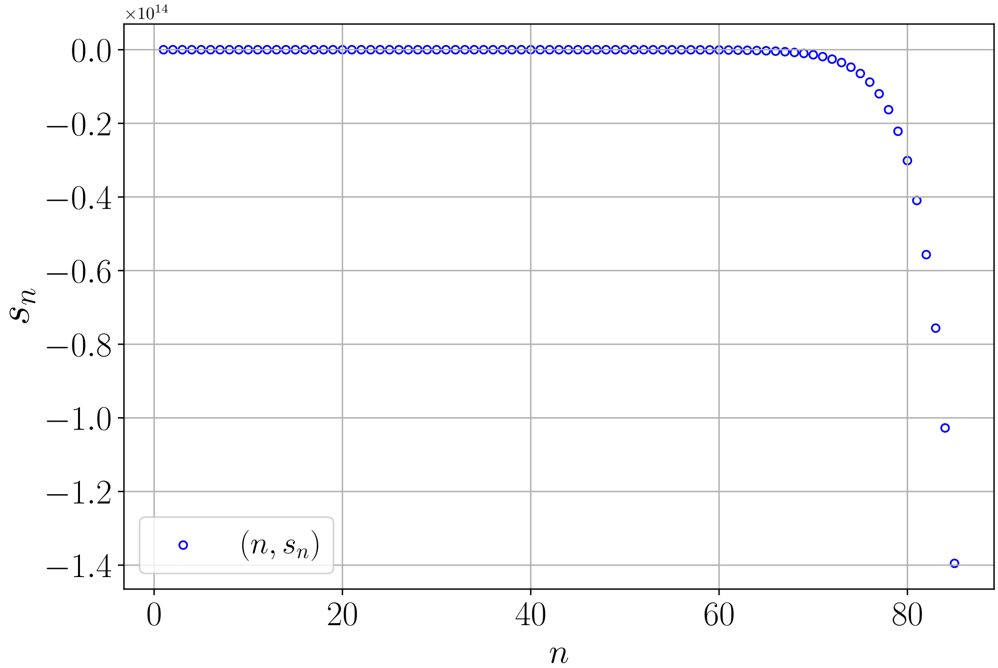
ومنه:

$$\frac{(2n)!}{3^n \cdot (n!)^2 \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \sim -2 \cdot \frac{(2n)! \cdot n^2}{3^n \cdot (n!)^2}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

بوضع: $a_n=\frac{(2n)!\cdot n^2}{3^n\cdot(n!)^2}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\cdot(n+1)^2}{3^{n+1}\cdot n^2}\cdot\frac{3^n\cdot(n!)^2}{(2n)!\cdot n^2}=\frac{4}{3}>1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار دَالامْبِير (انظر الشكل 37.5).



شكل 37.5: النقاط (n,s_n) حيث $n\in\{1,2,\dots,85\}$ و $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{3^k\cdot(k!)^2\cdot\ln\left(\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)}$.

التمرين 140

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n!)^3\cdot\sinh^2(n)}{(3n)!}.$$

الحل: من أجل $\sinh(n)$، يوجد عدد طبيعي m كبير كفاية، بحيث يكون:

$$\sinh(n)\approx\frac{e^n}{2},\qquad \forall n\geqslant m.$$

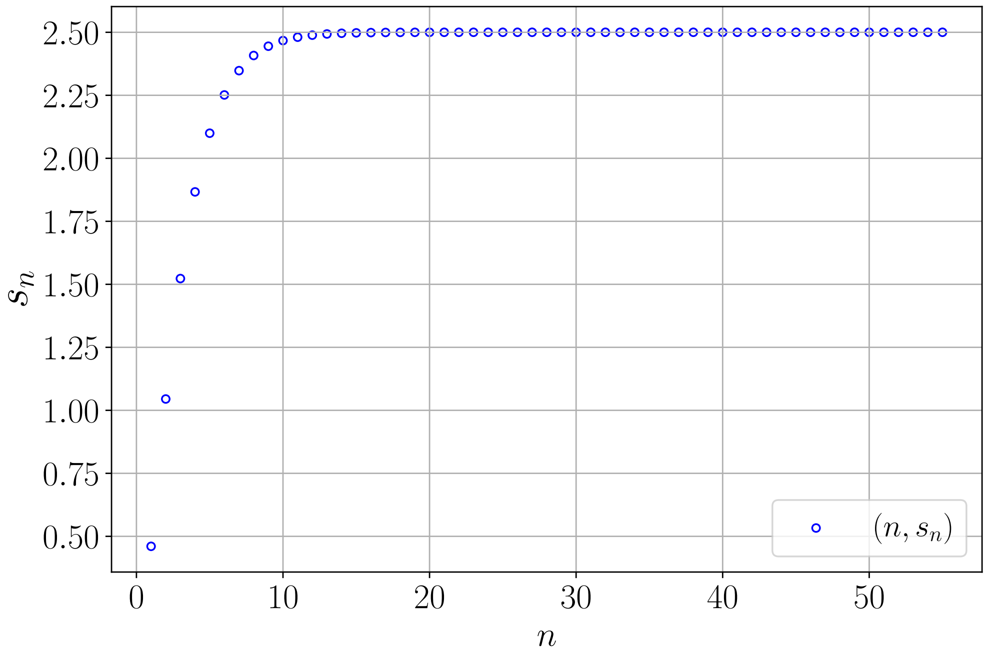
(انظر الشكل 43.1). ومنه:

$$\frac{2^n\cdot(n!)^3\cdot\sinh^2(n)}{(3n)!}\approx\frac{2^n\cdot(n!)^3\cdot e^{2n}}{4\cdot(3n)!}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2e^2)^n\cdot(n!)^3}{(3n)!},\qquad\forall n\geqslant m.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(2e^2)^n\cdot(n!)^3}{(3n)!}$. لنضع: $a_n=\frac{(2e^2)^n\cdot(n!)^3}{(3n)!}$، ومنه نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2e^2(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)}=\frac{2e^2}{27}\approx 0.55<1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر. وبما أنَّ حذف عدد منته من حدود مُتَسَلْسِلَة لا يؤثر على طبيعتها فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (انظر الشكل 38.5).



شكل 38.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 55\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot (k!)^3 \cdot \sinh^2(k)}{(3k)!}$، في هذا الشكل لدينا $s_{55} \approx 2.50009$، ومنه يُمكِنُنا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n!)^3 \cdot \sinh^2(n)}{(3n)!} \approx 2.5$.

التمرين 141

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot \sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{(2n)^{3n}}.$$

الحل: إنَّ:

$$\sin\left(\frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

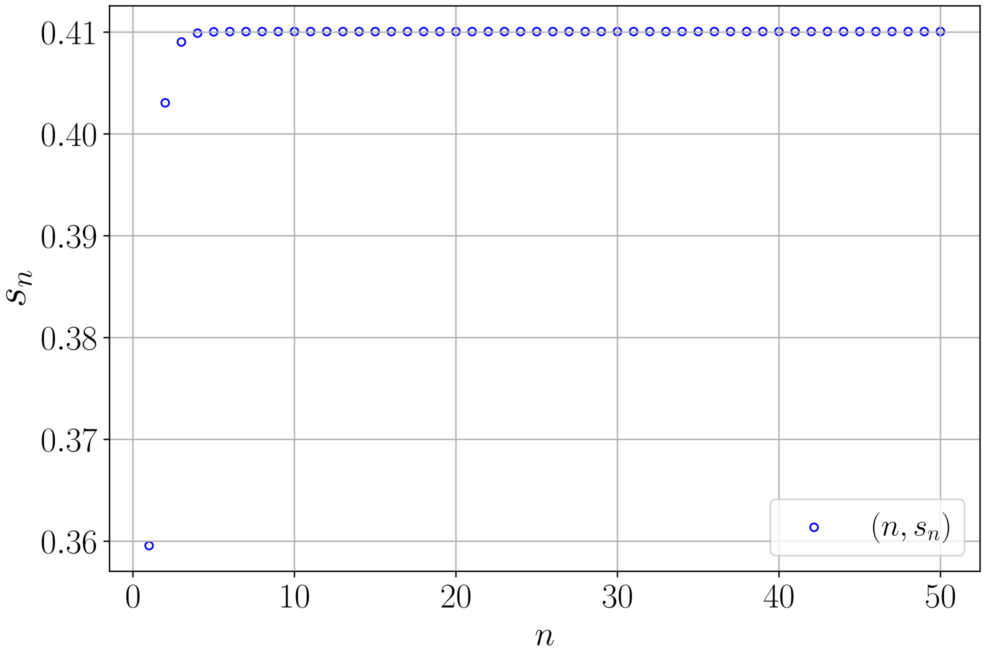
ومنه:

$$\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \sim \frac{(3n)!}{(2n)^{3n} \cdot (2n)}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

بوضع: $a_n = \frac{(3n)!}{(2n)^{3n} \cdot (2n)}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)^3} \cdot \frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3} = \frac{9}{e^3} \approx 0.45 < 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 39.5).



شكل 39.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 50\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(3k)! \cdot \sin\left(\frac{1}{2k}\right)}{(2k)^{3k}}$. في هذا الشكل لدينا $s_{50} \approx 0.410055$. ومنه يمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot \sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{(2n)^{3n}} \approx 0.41$.

التمرين 142

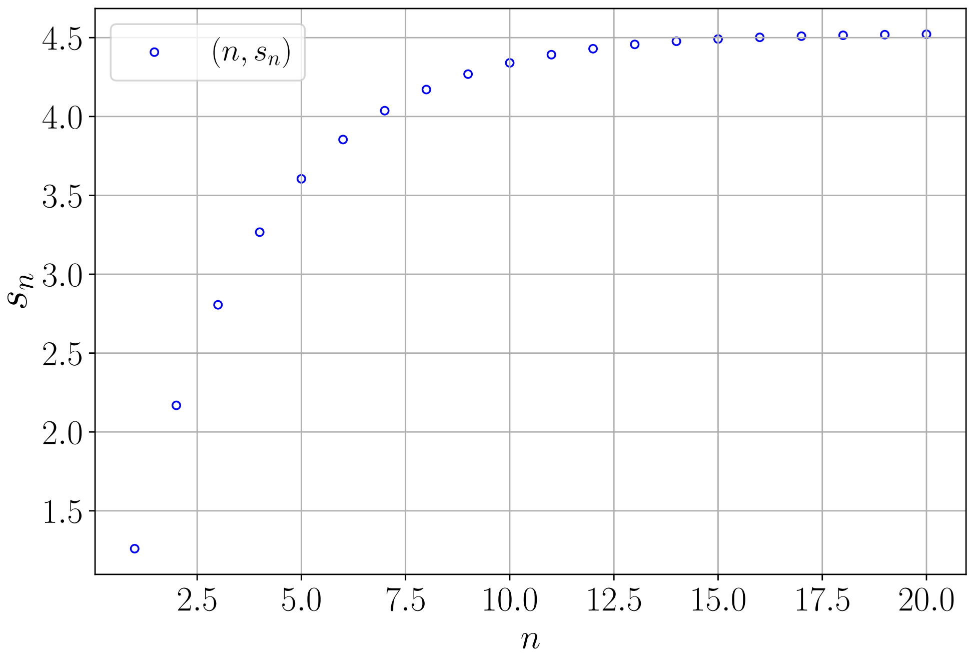
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n}{3}} \cdot \sqrt[3]{n! + 1}.$$

الحل: بوضع: $a_n = n^{-\frac{n}{3}} \cdot \sqrt[3]{n! + 1} = \frac{\sqrt[3]{n!+1}}{n^{\frac{n}{3}}}$، نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)! + 1}}{(n+1)^{\frac{n+1}{3}}} \cdot \frac{n^{\frac{n}{3}}}{\sqrt[3]{n! + 1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)n! + 1} \cdot n^{\frac{n}{3}}}{(n+1)^{\frac{n}{3}} \cdot (n+1)^{1/3} \cdot \sqrt[3]{n! + 1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(n+1) \cdot n! + 1}{(n+1)(n! + 1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n! + \frac{1}{n+1}}{n! + 1}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\cancel{n!}\left(1+\frac{1}{(n+1)!}\right)}{\cancel{n!}\left(1+\frac{1}{n!}\right)}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \approx 0.72 < 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر (انظر الشكل 40.5).



شكل 40.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 20\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{k}{3}} \cdot \sqrt[3]{k!+1}$، في هذا الشكل لدينا $s_{20} \approx 4.52161$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n}{3}} \cdot \sqrt[3]{n!+1} \approx 4.5$. ومن أجل المجموع لهذه المتَسَلْسِلَة، حسب www.wolframalpha.com، يكون: $\sum_{k=1}^{1000} n^{-\frac{n}{3}} \cdot \sqrt[3]{n!+1} \approx 4.52901$.

التمرين 143

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \arctan\left(\frac{2^n}{n^n}\right).$$

الحل: إنَّ:

$$\arctan x \sim x; \qquad x \longrightarrow 0.$$

كما أنَّه بوضع: $a_n := \frac{2^n}{n^n}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 0 < 1.$$

ومنه فإنَّ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر. وبالتَّالي فإنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^n} = 0$ (انظر المبرهنة 3).
ومنه يمكننا أن نكتب:

$$\arctan\left(\frac{2^n}{n^n}\right) \sim \frac{2^n}{n^n}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

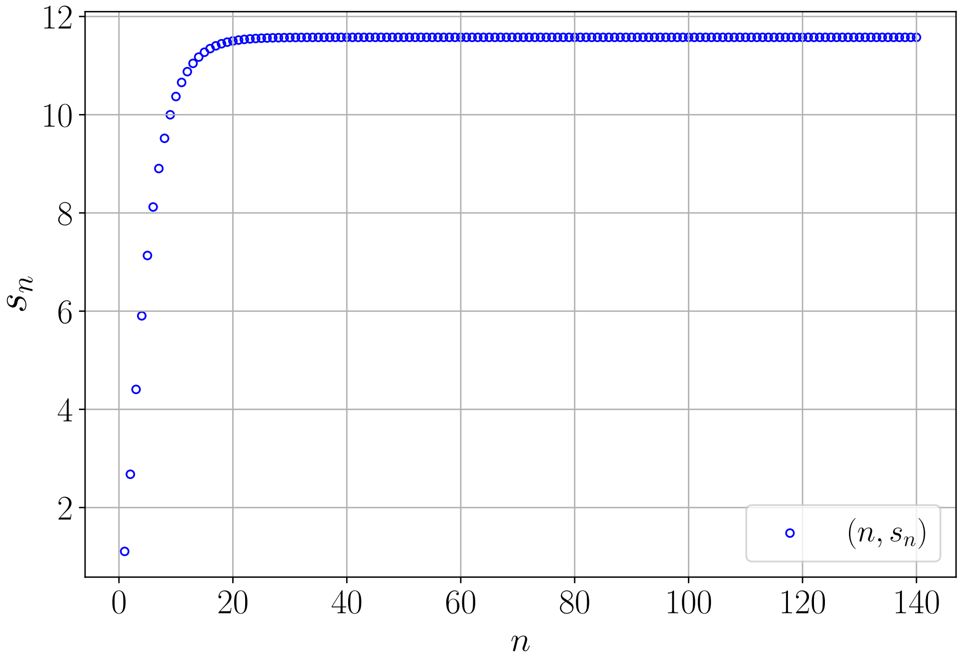
ومنه نجد:

$$n! \arctan\left(\frac{2^n}{n^n}\right) \sim \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$. بوضع $b_n := \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n! \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ مُتَقارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة أيضًا (انظر الشكل 41.5).



شكل 41.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 140\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k! \arctan\left(\frac{2^k}{k^k}\right)$. في هذا الشكل لدينا $s_{140} \approx 11.5754581$، ومنه يمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \arctan\left(\frac{2^n}{n^n}\right) \approx 11.58$.

التمرين 144

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\sqrt{(2n)!} \cdot \cosh n}.$$

الحل: من أجل $\cosh(n)$، يوجد عدد طبيعي m كبير كفاية، بحيث يكون:

$$\cosh(n) \approx \frac{e^n}{2}, \quad \forall n \geqslant m.$$

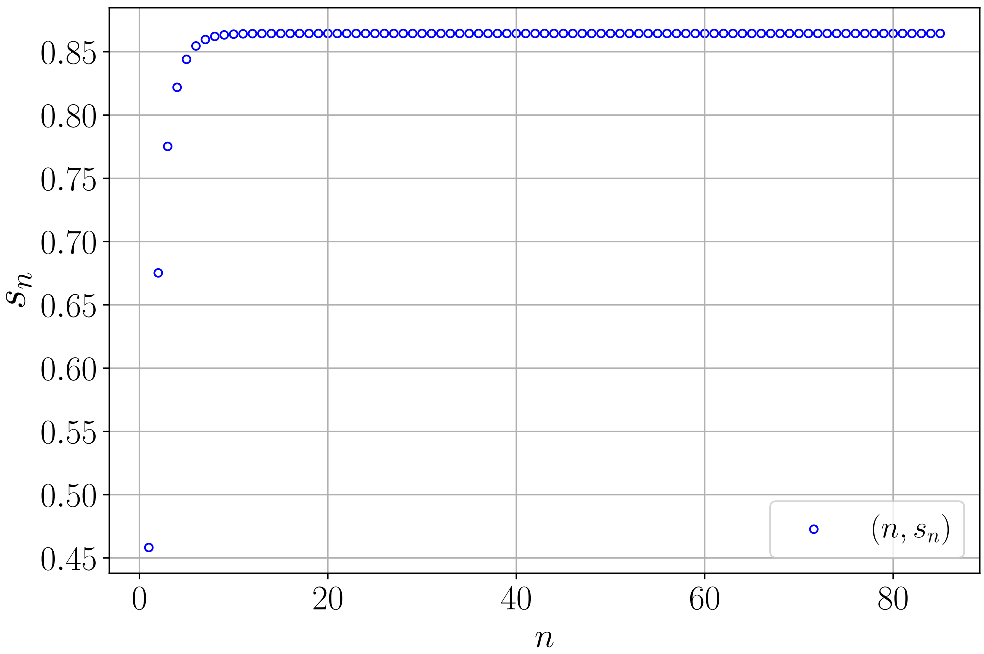
(انظر الشكل 43.1). ومنه:

$$\frac{n^n}{\sqrt{(2n)!} \cdot \cosh n} \approx \frac{2 \cdot n^n}{\sqrt{(2n)!} \cdot e^n}, \quad \forall n \geqslant m.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2 \cdot n^n}{\sqrt{(2n)! \cdot e^n}}$. لنضع: $a_n = \frac{2 \cdot n^n}{\sqrt{(2n)! \cdot e^n}}$، ومنه نجد:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2} \cdot (n+1)^{n+1}}{\sqrt{(2n+2)! \cdot e^{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{(2n)! \cdot e^n}}{\cancel{2} \cdot n^n} \\
&= \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{\sqrt{(2n+2)(2n+1)(2n)! \cdot \cancel{e^n} \cdot e}} \cdot \frac{\sqrt{(2n)! \cdot \cancel{e^n}}}{n^n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n+1}} = e \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَة حسب اختبار دَالامْبِيْر. وبما أنَّ حذف عدد منته من حدود مُتَسَلْسِلَة لا يؤثر على طبيعتها فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقَارِبَة (انظر الشكل 42.5).



شكل 42.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 85\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^k}{\sqrt{(2k)!} \cdot \cosh k}$. في هذا الشكل لدينا $s_{85} \approx 0.8644592$، ومنه يمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\sqrt{(2n)!} \cdot \cosh n} \approx 0.86$.

التمرين 145

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdots (3n+1)^2}{(2n)!} \cdot \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

الحل: لنضع: $a_n := \frac{1^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdots (3n+1)^2}{(2n)!} \cdot \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right)$، إنَّ:

$$\arctan x \sim x; \quad x \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

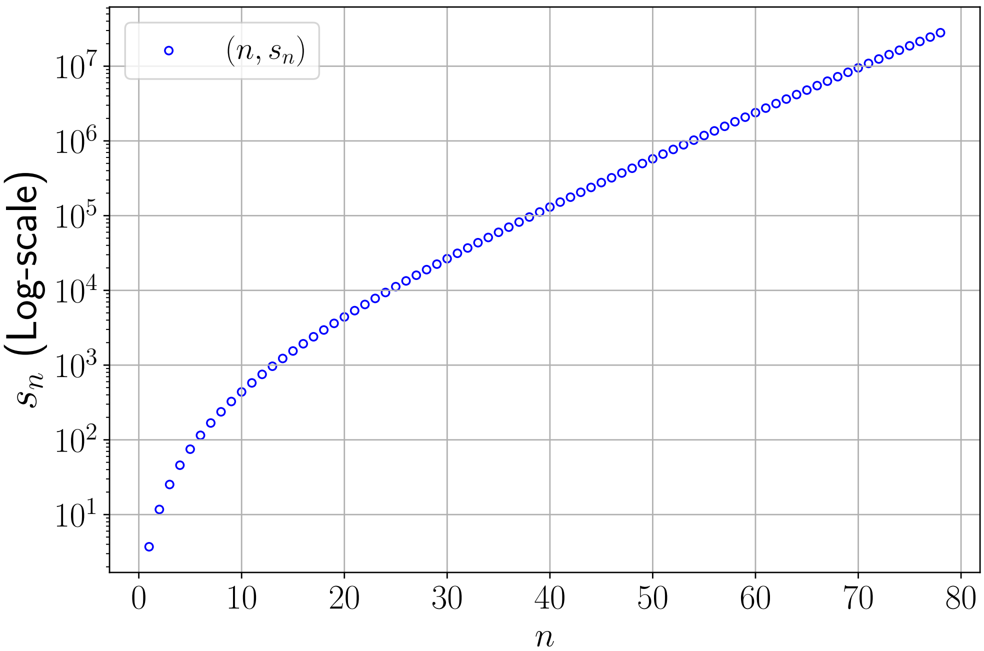
ومنه نجد:

$$a_n \sim \frac{1^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdots (3n+1)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2^n}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

لنضع: $b_n := \frac{1^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \cdots (3n+1)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2^n}$، ولندرس طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$، إن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+4)^2}{2(2n+2)(2n+1)} = \frac{9}{8} > 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتَباعِدَة حسب اختبار دَالامْبِيْر، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة أيضًا (انظر الشكل 43.5).



شكل 43.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 78\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

التمرين 146

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n)!\cdot\left(\arctan\left(\frac{1}{3^n}\right)\right)^n.$$

الحل: لنضع: $a_n := (3n)!\cdot\left(\arctan\left(\frac{1}{3^n}\right)\right)^n$، إنَّ:

$$\arctan x \sim x;\quad x\longrightarrow 0 \quad\Longrightarrow\quad \arctan\left(\frac{1}{3^n}\right)\sim\frac{1}{3^n};\quad n\longrightarrow\infty.$$

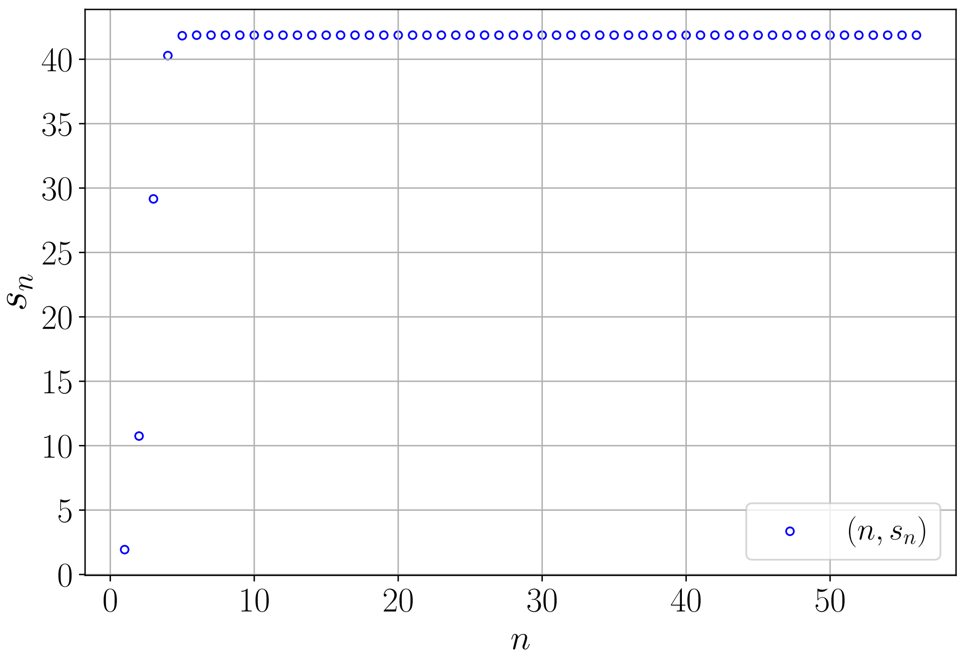
ومنه نجد:

$$(3n)!\cdot\left(\arctan\left(\frac{1}{3^n}\right)\right)^n\sim(3n)!\cdot\left(\frac{1}{3^n}\right)^n=\frac{(3n)!}{3^{n^2}};\quad n\longrightarrow\infty.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{3^{n^2}}$. بوضع $b_n := \frac{(3n)!}{3^{n^2}}$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)!}{3^{(n+1)^2}}\cdot\frac{3^{n^2}}{(3n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{3^{2n+1}}=0<1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ مُتَقَارِبَة حسب اختبار دَالامْبِير، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقَارِبَة أيضًا (انظر الشكل 44.5).



شكل 44.5: النقاط (n, s_n) حيث $n\in\{1,2,\ldots,56\}$ و $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{56}\approx 41.86928$.
ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\approx 41.87$.

ملاحظة 27:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}\cdot(2n)!}{n^n\cdot n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}\cdot(n!)^4}{(3n)!\cdot(n+1)!},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\arctan(n))^n}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot(n!)^3}{(3n)!}\cosh(2n),\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\pi^n}\tan\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}\sin\left(\frac{1}{2n}\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 7^n}\sinh(3n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2\cdot 5^2\cdot 8^2\cdots(3n+2)^2}{(2n+1)!}\cdot\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n)!\cdot\left(\arctan\left(\frac{1}{3n}\right)\right)^n.$$

التمرين 147

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)^{n^2+n+5}.$$

الحل: لنضع: $a_n=\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)^{n^2+n+5}$، فنجد:

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)^n\cdot\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)\cdot\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)^{\frac{5}{n}}.$$

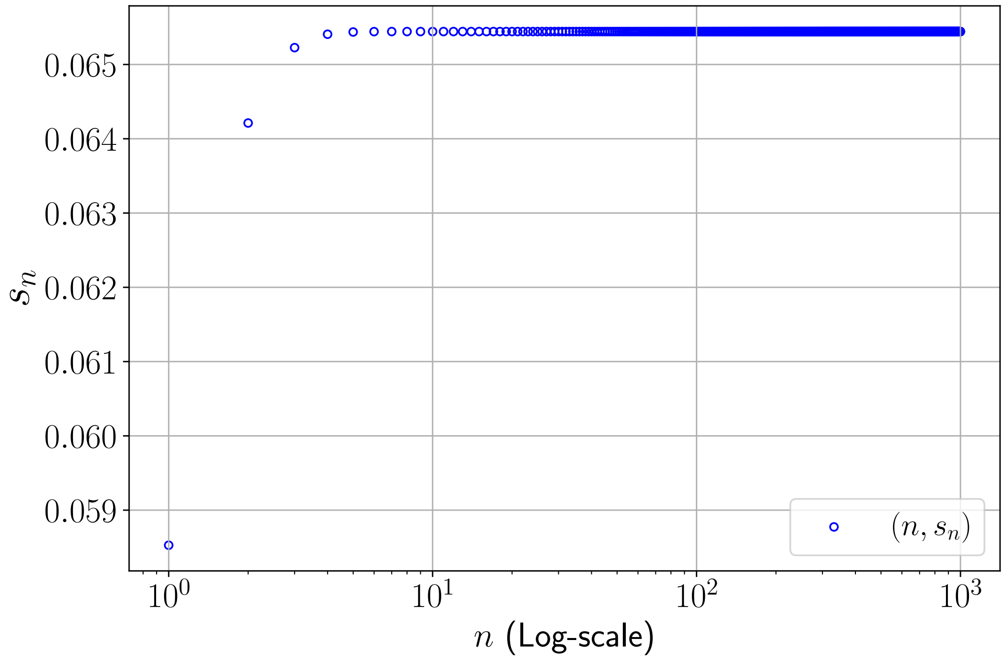
لكن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)^n=e^{-2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)^{\frac{5}{n}}=1.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-2}<1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 45.5).



شكل 45.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{1000} \approx 0.0654433125$، ومنه يمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.06$.

التمرين 148

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{3^n}\right) \cdot \ln^n(n).$$

الحل: إنَّ: $\lim_{n\to\infty} 3^{-n} = 0$، ومنه:

$$\tan\left(\frac{1}{3^n}\right) \sim \frac{1}{3^n}; \qquad n \longrightarrow \infty.$$

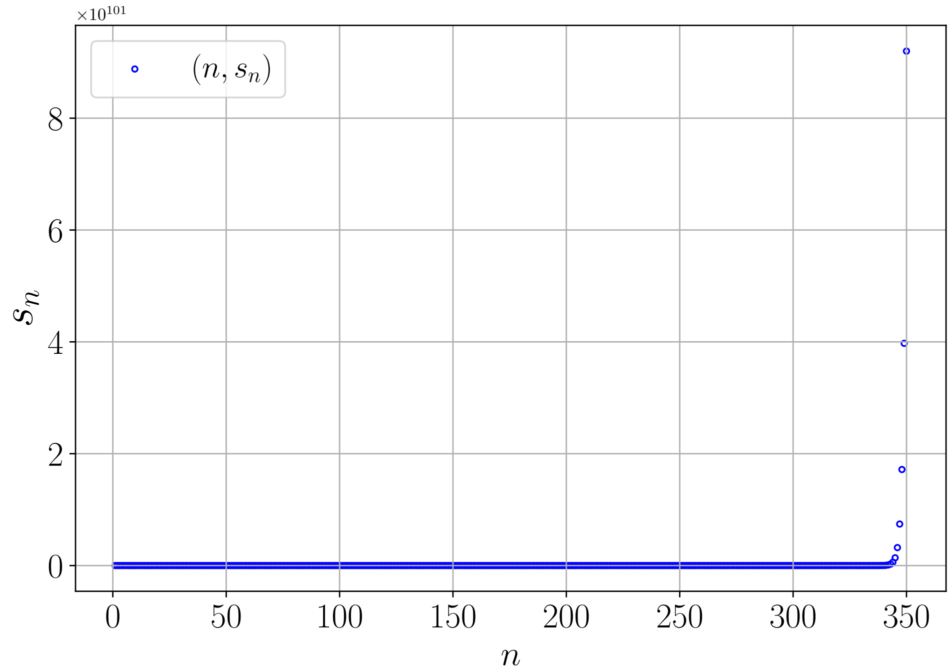
وبالتَّالي فإنَّ:

$$\tan\left(\frac{1}{3^n}\right) \cdot \ln^n(n) \sim \left(\frac{\ln(n)}{3}\right)^n; \qquad n \longrightarrow \infty.$$

لنضع: $a_n = \left(\frac{\ln(n)}{3}\right)^n$، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{3} = \infty.$$

وبالتَّالي فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 46.5).



شكل 46.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 350\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{3^k}\right) \cdot \ln^k(k)$.

التمرين 149

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^n \cdot \log_4^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

الحل: لنضع: $a_n := \sqrt{n^n \cdot \log_4^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$، إنَّ:

$$\ln(1+x) \sim x; \quad x \longrightarrow 0 \Longrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

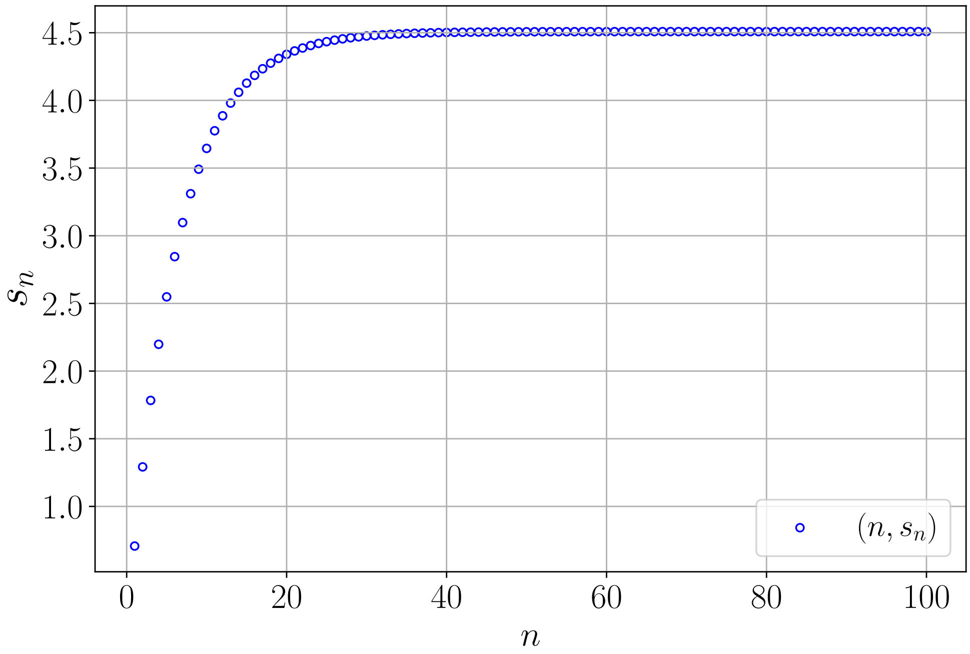
ومنه عندما $n \longrightarrow \infty$ يصبح لدينا:

$$a_n = \sqrt{n^n \cdot \frac{\ln^n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln^n 4}} \sim \sqrt{\cancel{n^n} \cdot \frac{1}{\cancel{n^n} \ln^n 4}} = \sqrt{\frac{1}{\ln^n 4}}.$$

لنضع: $b_n = \frac{1}{\sqrt{\ln^n 4}}$ فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{\sqrt{\ln 4}} \approx 0.85 < 1.$$

وبالتَّالي فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 47.5).



شكل 47.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$، في هذا الشكل لدينا $s_{100} \approx 4.5083318111$، ومنه يمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 4.51$.

التمرين 150

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[3n\left(\arctan\left(\tfrac{1}{n}\right) - \arcsin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) + n\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\cosh\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]^{n^3}.$$

الحل: لنضع: $a_n := \left[3n\left(\arctan\left(\tfrac{1}{n}\right) - \arcsin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) + n\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\cosh\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]^{n^3}$، ومنه:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left[3n\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right) + n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

ولنحسب النهاية: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$، لنضع:

$$f(x) = \left[3x\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x^2}.$$

ولنفرض: $t = \frac{1}{x}$، ومنه عندما $x \longrightarrow \infty$ يكون $t \longrightarrow 0^+$، ومنه يكون:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(t) := \left[\frac{3}{t}\left(\arctan(t) - \arcsin(t)\right) + \frac{1}{t}\sin(t)\cosh(t)\right]^{1/t^2}.$$

إن:

$$\ln(g(t)) = \frac{1}{t^2}\ln\left[\frac{3}{t}\left(\arctan(t) - \arcsin(t)\right) + \frac{1}{t}\sin(t)\cosh(t)\right].$$

لكن:

$$\arctan(t) \sim t - \frac{t^3}{3};\ t \longrightarrow 0, \qquad \arcsin(t) \sim t + \frac{t^3}{6};\ t \longrightarrow 0,$$

$$\sin(t) \sim t - \frac{t^3}{6};\ t \longrightarrow 0, \qquad \cosh(t) \sim 1 + \frac{t^2}{2};\ t \longrightarrow 0.$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\ln(g(t)) &\sim \frac{1}{t^2}\ln\left[\frac{3}{t}\left(-\frac{t^3}{2}\right) + \frac{1}{t}\left(t - \frac{t^3}{6}\right)\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)\right];\ t \longrightarrow 0\\ &= \frac{1}{t^2}\ln\left[1 - \left(\frac{7}{6}t^2 + \frac{t^4}{12}\right)\right].\end{aligned}$$

وبما أنَّ: $\ln(1-y) \sim -y;\ y \longrightarrow 0$، فإنَّ:

$$\ln(g(t)) \sim -\frac{1}{t^2}\left(\frac{7}{6}t^2 + \frac{t^4}{12}\right) = -\frac{7}{6} - \frac{t^2}{12}; \qquad t \longrightarrow 0.$$

ومنه فإنَّ:

$$\lim_{t\to 0^+}\ln(g(t)) = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{7}{6} - \frac{t^2}{12}\right) = -\frac{7}{6}.$$

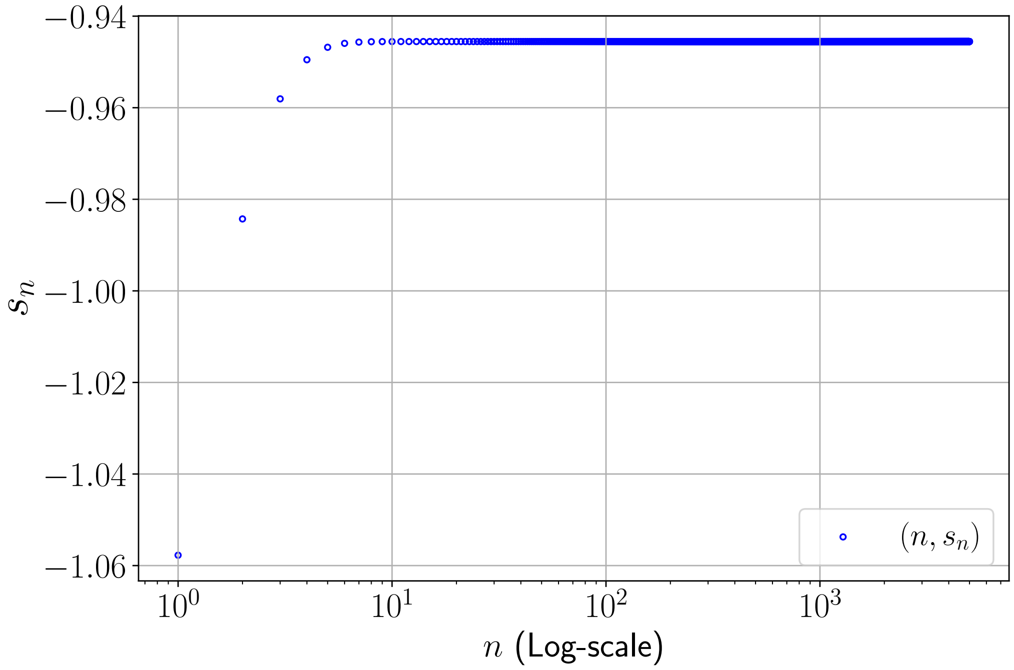
ومنه:

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = e^{-7/6}.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = e^{-7/6} \approx 0.3114 < 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 48.5).



شكل 48.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{5000} \approx -0.94554725$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx -0.95$.

مغالطة: من الممكن لأحد ما أن يفكر بالحل (الخاطئ!) بالشكل الآتي.
إنَّ:

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1}{n}\right) &\sim \frac{1}{n}; \quad n \longrightarrow \infty,\\
\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) &\sim \frac{1}{n}; \quad n \longrightarrow \infty,\\
\sin\left(\frac{1}{n}\right) &\sim \frac{1}{n}; \quad n \longrightarrow \infty,\\
\cosh\left(\frac{1}{n}\right) &\sim 1 + \frac{1}{2n^2}; \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

ومنه:

$$3n\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right) + n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 + \frac{1}{2n^2}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$a_n \sim \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{n^3}; \quad n \longrightarrow \infty. \tag{1.5}$$

إلا أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{n^2}=\sqrt{e}\approx 1.65>1.$$

وبالتَّالي فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة حسب اختبار كُوشِي.

إنَّ الخطأ في هذا الحل يكْمُن في عدم صحة التكافؤ (1.5)، إذ إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{n^3}}=0\neq 1.$$

التمرين 151

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{1-\tfrac{1}{n}}-\tfrac{n}{2}\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right]^{n^3}.$$

الحل: لنضع: $a_n:=\left[\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3}$. ومنه:

$$\sqrt[n]{a_n}=\left[\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

ولنحسب النهاية: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. لنضع:

$$f(x)=\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x^2}.$$

ولنفرض: $t=\frac{1}{x}$. ومنه عندما $x\longrightarrow\infty$ يكون $t\longrightarrow 0^+$. ومنه يكون:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to 0^+}g(t):=\left[\sqrt{1-t}-\frac{1}{2t}\ln(1+t)\sin(t)\right]^{1/t^2}.$$

إنَّ:

$$\ln(g(t))=\frac{1}{t^2}\ln\left[\sqrt{1-t}-\frac{1}{2t}\ln(1+t)\sin(t)\right].$$

لكن:

$$(1-t)^{1/2}\sim 1-\frac{t}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2=1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8};\qquad t\longrightarrow 0,$$

$$\sin(t)\sim t-\frac{t^3}{6};\quad t\longrightarrow 0,\qquad \ln(1+t)\sim t-\frac{t^3}{6};\quad t\longrightarrow 0.$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\ln(g(t))&\sim\frac{1}{t^2}\ln\left[1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}-\frac{1}{2t}\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\left(t-\frac{t^3}{6}\right)\right];\qquad t\longrightarrow 0\\&=\frac{1}{t^2}\ln\left[1-\left(t-\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{12}+\frac{t^4}{24}\right)\right].\end{aligned}$$

وبما أنَّ: $\ln(1-y) \sim -y;\ y \longrightarrow 0$، فإنَّ:

$$\begin{aligned}\ln\left(g(t)\right) &\sim -\frac{1}{t^2}\left(t-\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{12}+\frac{t^4}{24}\right); \quad t \longrightarrow 0\\ &= -\frac{1}{t}+\frac{1}{8}+\frac{t}{12}-\frac{t^2}{24}.\end{aligned}$$

ومنه فإنَّ:

$$\lim_{t\to 0^+} \ln\left(g(t)\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{8}+\frac{t}{12}-\frac{t^2}{24}\right) = -\infty.$$

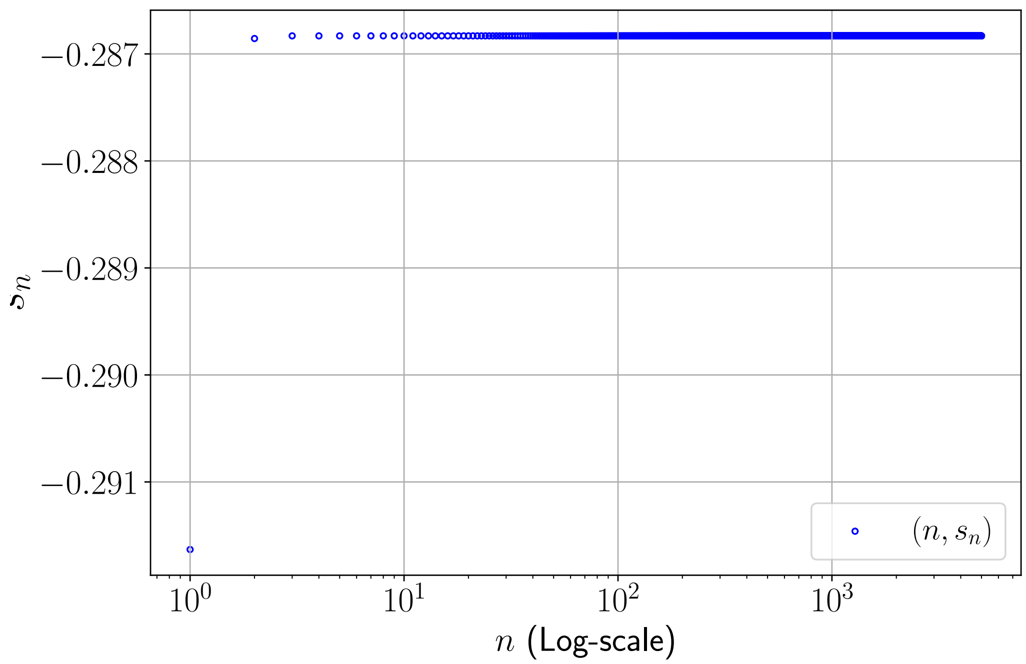
ومنه:

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 49.5).



شكل 49.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1,2,\dots,5000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{5000} \approx -0.2868311963$، ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx -0.29$.

مغالطة: من الممكن لأحد ما أن يفكر بالحل (الخاطئ!) بالشكل الآتي.

إنَّ:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{1}{n}} &\sim 1-\frac{1}{2n}; \quad n\longrightarrow\infty,\\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\sim \frac{1}{n}; \quad n\longrightarrow\infty,\\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) &\sim \frac{1}{n}; \quad n\longrightarrow\infty.\end{aligned}$$

ومنه:

$$\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\sim 1-\frac{1}{n}; \quad n\longrightarrow\infty.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$a_n=\left[\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3}\sim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3};\ n\longrightarrow\infty. \tag{2.5}$$

وبما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=0<1.$$

فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي.

إنَّ الخطأ في الحل يكْمُنُ في عدم صحة التكافؤ (2.5)، إذ إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}}=\infty\neq 1.$$

التمرين 152

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+\tfrac{n}{3}}\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{-n^3}.$$

الحل: لنضع: $a_n:=\left(\sqrt[3]{n^3+\frac{n}{3}}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n^3}$، إنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. في الحقيقة، نتأمل الدَّالَّة:

$$f(x)=\left(\sqrt[3]{x^3+\frac{x}{3}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^3}.$$

ولنثبت أنَّ: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. من أجل ذلك، لنفرض: $x=\frac{1}{t}$، ومنه عندما $x\longrightarrow+\infty$ يكون $t\longrightarrow 0^+$. ومنه يمكن أن نكتب:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{t\to 0^+}g(t)=\lim_{t\to 0^+}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{3t}}\sin t\right]^{1/t^3}.$$

إن:

$$\begin{aligned}
\ln g(t) &= \frac{1}{t^3}\ln\left[\left(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{3t}\right)^{1/3}\sin t\right] = \frac{\frac{1}{3}\ln\left[\frac{1}{t^3}\left(1+\frac{t^3}{3}\right)\right]+\ln(\sin t)}{t^3}\\
&= \frac{\frac{1}{3}\left[\ln(t^{-3})+\ln\left(1+\frac{t^2}{3}\right)\right]+\ln(\sin t)}{t^3}\\
&= \frac{-\ln t+\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{t^2}{3}\right)+\ln(\sin t)}{t^3} = \frac{\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{t^2}{3}\right)+\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{t^3}\\
&= \frac{\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{t^2}{3}\right)+3\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{3t^3} \sim \frac{\frac{t^2}{3}+3\ln\left(1-\frac{t^2}{6}\right)}{3t^3}; \quad t\longrightarrow 0\\
&\sim \frac{\frac{t^2}{3}+3\left(-\frac{t^2}{6}\right)}{3t^3} = -\frac{1}{18t^3}; \quad t\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

حيث أنَّ:

$$\ln(1+y)\sim y; \quad y\longrightarrow 0, \quad \sin y\sim y-\frac{y^3}{3!}; \quad y\longrightarrow 0,$$
$$\ln(1-y)\sim -y; \quad y\longrightarrow 0.$$

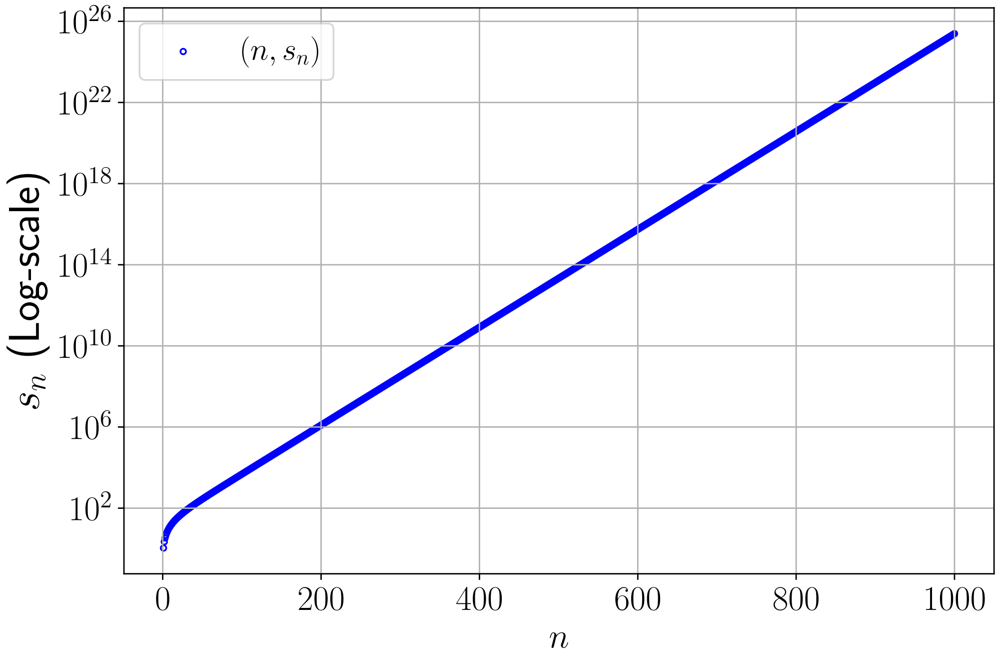
ومنه:

$$\lim_{t\to 0^+}\ln g(t) = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{18t^3}\right) = -\infty.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

ومنه نجد: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَبَاعِدَة (انظر الشكل 50.5).



شكل 50.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

مغالطة: من الممكن لأحد ما أن يفكر بالحل (الخاطئ!) بالشكل الآتي.

إنَّ:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^3 + \frac{n}{3}} &= n \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{3n^2}} \sim n\left(1 + \frac{1}{9n^2}\right); \quad n \longrightarrow \infty,\\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) &\sim \frac{1}{n}; \quad n \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

ومنه:

$$\sqrt[3]{n^3 + \frac{n}{3}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim n\left(1 + \frac{1}{9n^2}\right) \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{9n^2}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$a_n = \left(\sqrt[3]{n^3 + \frac{n}{3}} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n^3} \sim \left(1 + \frac{1}{9n^2}\right)^{-n^3}; \quad n \longrightarrow \infty. \tag{3.5}$$

وبما أنَّ:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{9n^2}\right)^{-n^3}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{9n^2}\right)^{-n^2} = e^{-\frac{1}{9}} < 1.$$

فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي.

إنَّ الخطأ في الحل يكْمُنُ في عدم صحة التكافؤ (3.5)، إذ إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(1+\frac{1}{9n^2}\right)^{-n^3}} = \infty \neq 1.$$

التمرين 153

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}\right).$$

الحل: إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0.$$

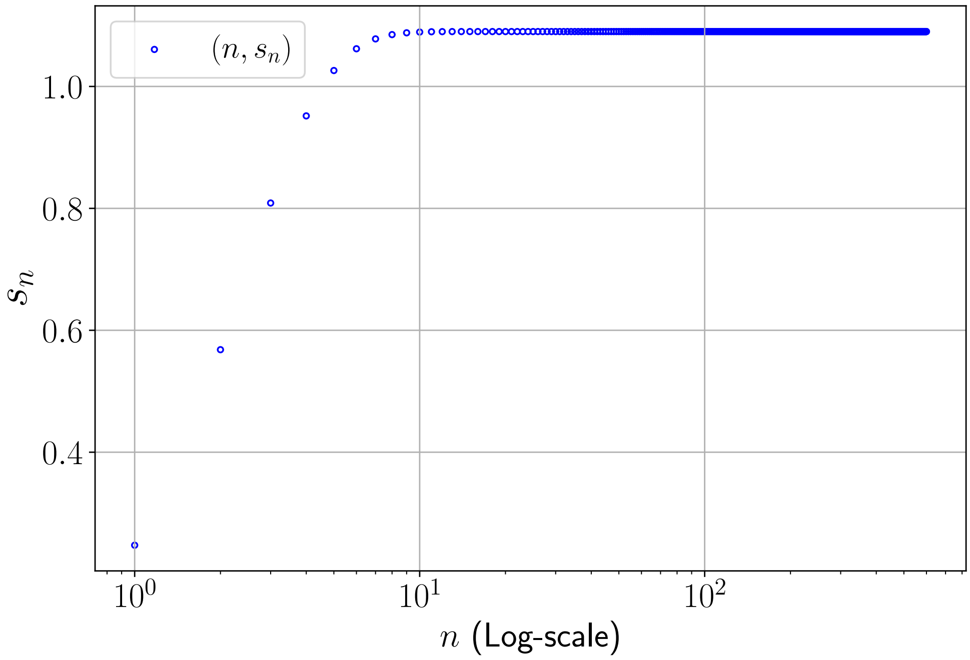
ومنه:

$$a_n := \sin\left(\frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}\right) \sim \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}; \qquad n \longrightarrow \infty.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$. إن:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$ مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (انظر الشكل 51.5).



شكل 51.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 600\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$، في هذا الشكل لدينا $s_{600} \approx 1.090042$. ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \approx 1.1$.

التمرين 154

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n .$$

الحل: إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0.$$

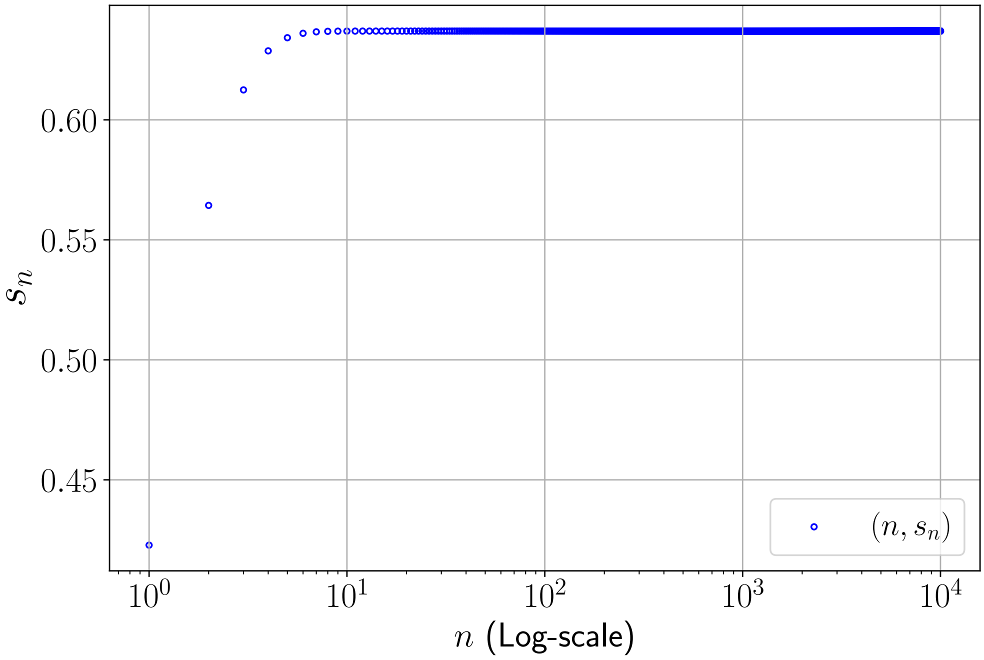
ومنه:

$$a_n := \tan\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n \sim \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n; \qquad n \longrightarrow \infty.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَةَ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$، إن:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3} < 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$ مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المعطَاة مُتَقارِبَة (انظر الشكل 52.5).



شكل 52.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 10^4\}$ و $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$، في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.636985$، ومنه يُمكِنُنا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.64$.

التمرين 155

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \arctan\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)^{n^5}.$$

الحل: لنضع: $a_n := \left(n \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^5}$، إنَّ:

$$\begin{aligned}
\arctan x &\sim x - \frac{x^3}{3}; \quad x \longrightarrow 0,\\
\Longrightarrow \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) &\sim \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^6}; \quad n \longrightarrow \infty,\\
\Longrightarrow n \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) &\sim \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^5}; \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ:

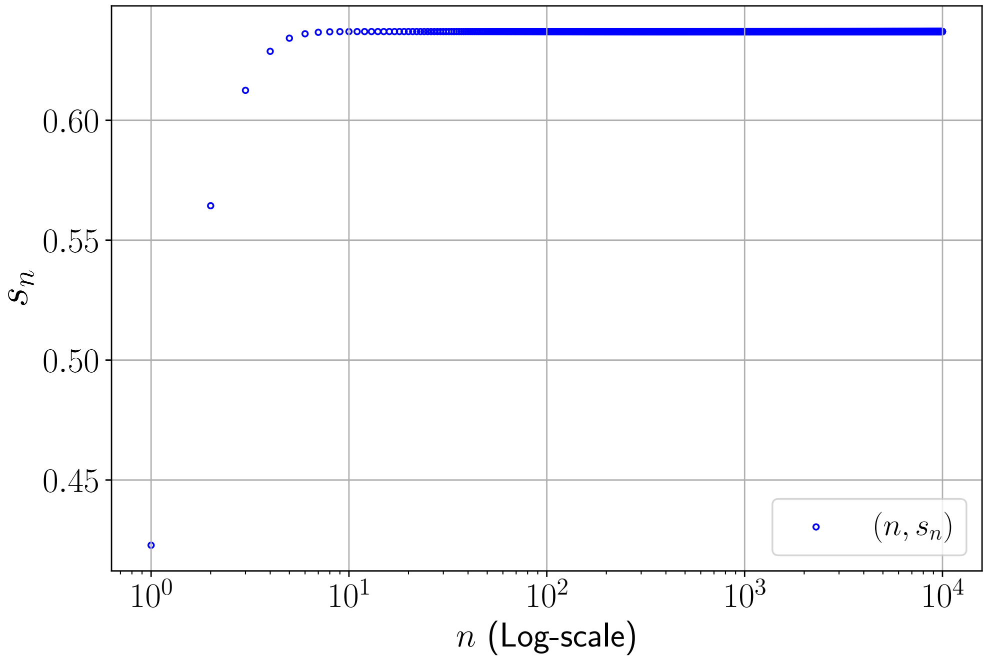
$$a_n = \left(n \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^5} \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{n^5} \left(1 - \frac{1}{3n^4}\right)^{n^5}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

لنضع: $b_n := \left(\frac{1}{n}\right)^{n^5} \left(1 - \frac{1}{3n^4}\right)^{n^5}$ ولندرس طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

إن:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{n^4} \left(1 - \frac{1}{3n^4}\right)^{n^4} = (0) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = 0 < 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتقارِبَة حسب اختبار كُوشِي، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتقارِبَة (انظر الشكل 53،5).



شكل 53،5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 0.78539816$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \approx 0.78$.

التمرين 156

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n^2}{2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n^2}.$$

الحل: لنضع:

$$a_n := n^{\frac{n^2}{2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n^2} = \left(\sqrt{n}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n^2}.$$

ومنه:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\sqrt{n}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n}.$$

ولنحسب النهاية: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$، لنضع:

$$f(x)=\left(\sqrt{x}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^{x}.$$

ولنفرض: $\sqrt{x}=\frac{1}{t}$، ومنه عندما $x\longrightarrow\infty$ يكون $t\longrightarrow 0^{+}$، ومنه يكون:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to 0^{+}}g(t):=\left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^{1/t^{2}}.$$

إنَّ:

$$\begin{aligned}\ln\left(g(t)\right)&=\frac{1}{t^{2}}\ln\left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)\\&\sim\frac{1}{t^{2}}\ln\left(1-\frac{t^{2}}{3}\right)\sim\frac{1}{t^{2}}\left(-\frac{t^{2}}{3}-\frac{t^{4}}{18}\right);\quad t\longrightarrow 0\\&=-\frac{1}{3}-\frac{t^{2}}{18}.\end{aligned}$$

حيث أنَّ:

$$\arctan y\sim y-\frac{y^{3}}{3};\ \ y\longrightarrow 0,\qquad \ln(1-y)\sim -y-\frac{y^{2}}{2};\ \ y\longrightarrow 0.$$

ومنه فإنَّ:

$$\lim_{t\to 0^{+}}\ln\left(g(t)\right)=\lim_{t\to 0^{+}}\left(-\frac{1}{3}-\frac{t^{2}}{18}\right)=-\frac{1}{3}.$$

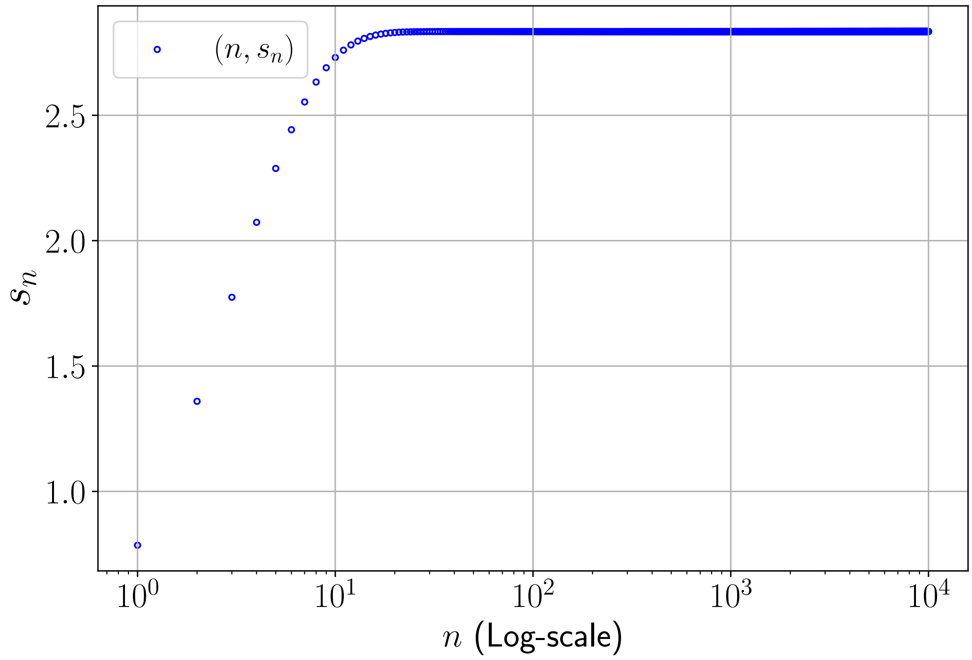
ومنه:

$$\lim_{t\to 0^{+}}g(t)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\approx 0.72<1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي (انظر الشكل 54.5).



شكل 54.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx 2.8340659$. ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \approx 2.83$.

مغالطة: من الممكن لأحد ما أن يفكر بالحل (الخاطئ!) بالشكل الآتي.
إنَّ:

$$\arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}; \quad x \longrightarrow 0,$$
$$\Longrightarrow \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3(\sqrt{n})^3} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{3n}\right); \quad n \longrightarrow \infty,$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$a_n \sim \cancel{n^{\frac{n^2}{2}}} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{n^2}; \quad n \longrightarrow \infty. \tag{4.5}$$

لنضع: $b_n := \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{n^2}$ ولندرس طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \approx 0.72 < 1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتقارِبة حسب اختبار كُوشي، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتقارِبة أيضًا.

إنَّ الخطأ في الحل يكْمُنُ في عدم صحة التكافؤ (4.5)، إذ إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n^2}} = \sqrt[5]{e} \neq 1.$$

التمرين 157

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n\sqrt{n^2+n}}.$$

الحل: لنضع: $a_n := \left[\sqrt{n}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n\sqrt{n^2+n}}$، إنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. في الحقيقة، نتأمل الدالَّة:

$$f(x) = \left[\sqrt{x}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^{x\sqrt{x^2+x}}.$$

ولنثبت أنَّ: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. من أجل ذلك، لنفرض: $\sqrt{x} = \frac{1}{t}$، ومنه عندما $x \longrightarrow \infty$ يكون $t \longrightarrow 0^+$. ومنه يمكن أن نكتب:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\tan t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}}}.$$

إنَّ:

$$\begin{aligned}
\ln g(t) &= \frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}}\ln\left(\frac{\tan t}{t}\right) = \frac{1}{t^4}(1+t^2)^{1/2}\ln\left(\frac{\tan t}{t}\right)\\
&\sim \frac{1}{t^4}\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^4\right)\ln\left(1+\frac{t^2}{3}\right); \quad t\longrightarrow 0\\
&\sim \frac{1}{t^4}\left(1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}\right)\left(\frac{t^2}{3}-\frac{t^4}{18}\right); \quad t\longrightarrow 0\\
&= \frac{t^8-10t^6+16t^4+48t^2}{144t^4} = \frac{1}{144}\left(t^4-10t^2+16+\frac{48}{t^2}\right).
\end{aligned}$$

حيث أنَّ:

$$\ln(1+y) \sim y - \frac{y^2}{2}; \quad y\longrightarrow 0, \qquad \tan y \sim y + \frac{y^3}{3}; \quad y \longrightarrow 0,$$

$$(1+y)^{\alpha} \sim 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}y^2; \quad y\longrightarrow 0,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

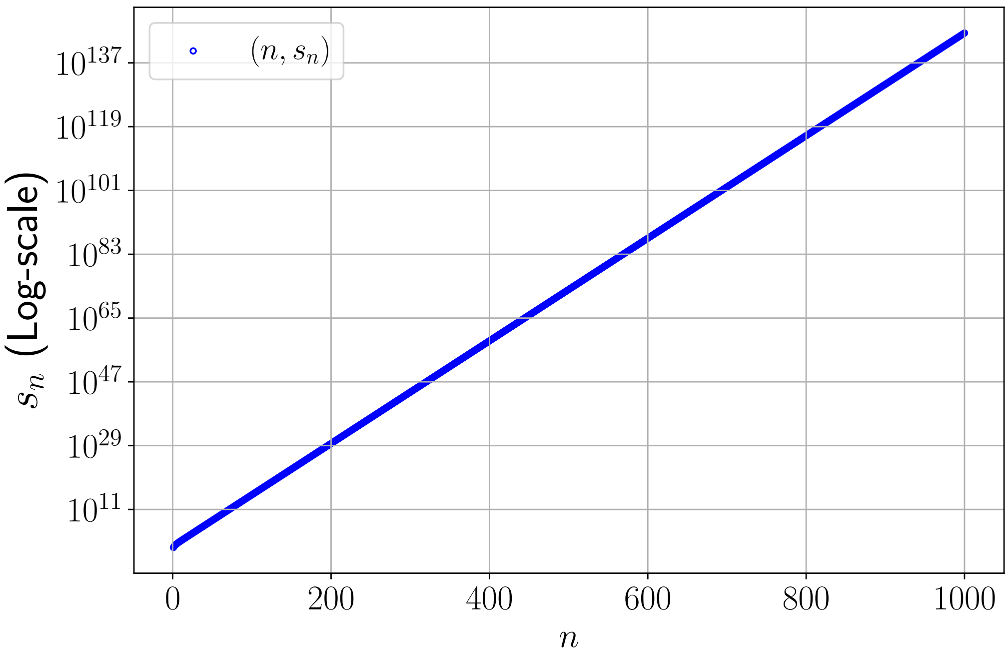
ومنه:

$$\lim_{t\to 0^+}\ln g(t) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{144}\left(t^4-10t^2+16+\frac{48}{t^2}\right) = \infty.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

فالمُتَسَلسِلَةَ المُعطَاة مُتَباعِدَة (انظر الشكل 55.5).



شكل 55.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

مغالطة: من الممكن لأحد ما أن يفكر بالحل (الخاطئ!) بالشكل الآتي.
إنَّ:

$$\begin{aligned}
\tan x &\sim x + \frac{x^3}{3}; \quad x \longrightarrow 0,\\
\Longrightarrow \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{3(\sqrt{n})^3}; \quad n \longrightarrow \infty,\\
\Longrightarrow \sqrt{n}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &\sim 1 + \frac{1}{3n}; \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$a_n = \left[\sqrt{n}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n\sqrt{n^2+n}} \sim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n\sqrt{n^2+n}}; \quad n \longrightarrow \infty. \tag{5.5}$$

لنضع: $b_n := \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n\sqrt{n^2+n}}$ ولندرس طبيعة المُتَسَلسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt[3]{e} \approx 1.4 > 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَباعِدَة. إنَّ الخطأ في الحل يكْمُنُ في عدم صحة التكافؤ (5.5)، إذ إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n\sqrt{n^2+n}}} = e^{2/15} \neq 1.$$

التمرين 158

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\sqrt{n}} \sin n.$$

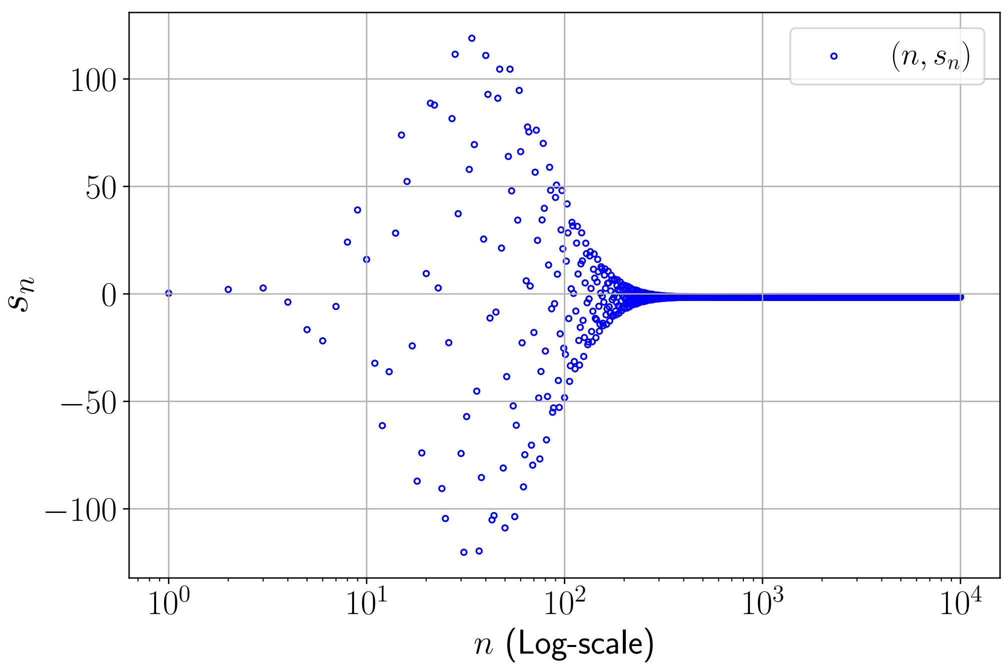
الحل: لنضع: $a_n := n^3 e^{-\sqrt{n}} \sin n$، ومنه:

$$a_n = \frac{n^3 \sin n}{(\sqrt{e})^n} \Longrightarrow |a_n| \leqslant \frac{n^3}{(\sqrt{e})^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{(\sqrt{e})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6 < 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\sqrt{e})^n}$ مُتَقارِبَة حسب اختبار كُوشِي. وبالتَّالي فالمُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 56.5).



شكل 56.5: النقاط (n, s_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. في هذا الشكل لدينا $s_{10^4} \approx -1.451123895$، ومنه يُمكِننا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \approx -1.45$.

ملاحظة 28:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة تَقارُب أو تَباعُد المُتَسَلْسِلَات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(4n\left(\tanh\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)+n\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{n^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}-\frac{n}{3}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^3-4n+5},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{-n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{n^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(n+\frac{1}{12n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(n+\frac{1}{6n}\right)\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+n^2}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

التمرين 159

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\cdots(a+\sqrt{n+1})};\qquad a>0.$$

الحل: لنضع: $a_n=\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\cdots(a+\sqrt{n+1})}$، فيكون:

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\cdots(a+\sqrt{n+1})(a+\sqrt{n+2})}.$$

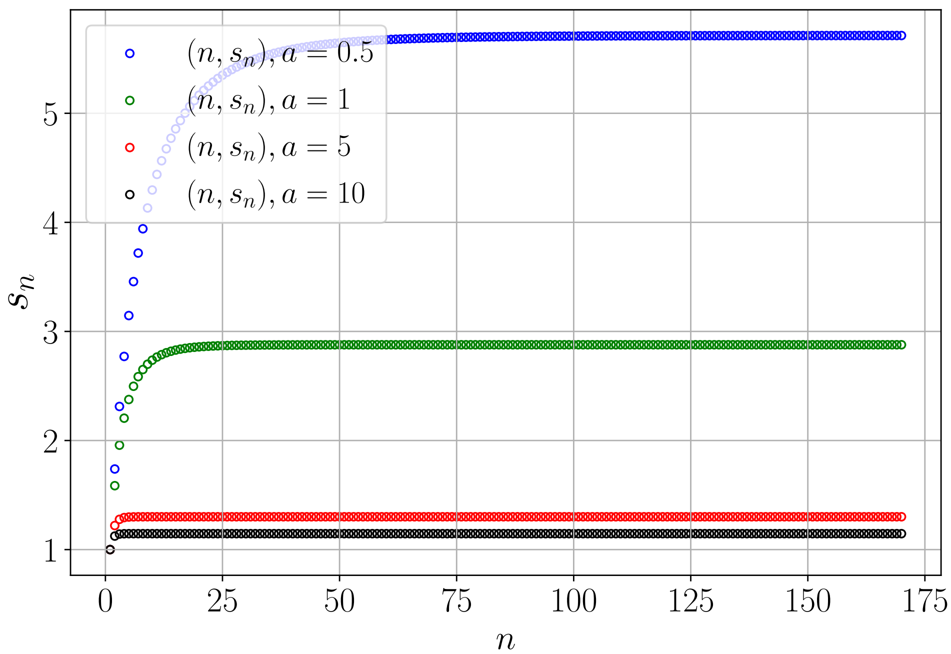
ومنه:

$$\begin{aligned}
n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= n\left(\frac{a+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}-1\right)\\
&= n\left(\frac{a+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)\\
&= n\left(\frac{a}{\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)\\
&= \frac{na}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{n}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\\
&= \frac{\sqrt{n}a}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{n}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+2n+1}}\\
&= \frac{\sqrt{n}a}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}
\end{aligned}$$

وبما أنَّ $a>0$، فإنَّنا نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\infty>1.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة حسب اختبار رَابْ (انظر الشكل 57،5).



شكل 57،5: النقاط (n, s_n) حيث $n\in\{1,2,\ldots,170\}$ و $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$.

في الشكل 57.5 لدينا $s_{170} \approx 5.712816$ من أجل $a = 0.5$، و $s_{170} \approx 2.877874$ من أجل $a = 1$، و $s_{170} \approx 1.300974$ من أجل $a = 5$، و $s_{170} \approx 1.145936$ من أجل $a = 10$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 5.71$ من أجل $a = 0.5$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 2.89$ من أجل $a = 1$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 1.3$ من أجل $a = 5$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx 1.14$ من أجل $a = 10$.

ملاحظة 29:

يمكن بشكل مماثل لحل التمارين السابقة، دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2) \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n+2)}{n! \cdot (n+1)! \cdot 9^n},$$

التمرين 160

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَنَاوِبَة، فهي من الشكل: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$، حيث أنَّ: $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} > 0; \ \forall n \geqslant 1$. كما أنَّ:

$$\sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{n} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = a_{n+1} < a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}; \quad \forall n \geqslant 1.$$

و

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = 0.$$

وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَقَارِبَة حسب اختبار لا يِبْنِتْز (والتَّقارُب شَرْطِي، تَحَقَّقْ من ذلك!). ومن أجل المجموع لهذه المُتَسَلْسِلَة، حسب www.wolframalpha.com، فإنَّ:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+1}} = -0.428.$$

وبرمجيًا باستخدام Python 3.10.7، كما في التمارين السابقة والأشكال المرتبطة بها، فإنَّنا نجد أنَّ:

$$s_{10^5} \approx -0.4174750466, \quad s_{10^6} \approx -0.4232471687, \quad s_{10^7} \approx -0.4259263718,$$

$$s_{10^8} \approx -0.4271699488, \quad s_{10^9} \approx -0.4277471662.$$

ومنه نلاحظ التقارب البطيء للمتتالية $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ للنهاية -0.428.

التمرين 161

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَنَاوِبَة، فهي من الشكل: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$، حيث أنَّ: $a_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\geqslant 0;\ \forall n\geqslant 1$. لنأخذ الآن الدَّالَّة:

$$f:[1,\infty[\longrightarrow[0,\infty[,\qquad f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

فنجد أن:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}.$$

لنضع:

$$2-\ln x<0\Longrightarrow \ln x>2\Longrightarrow x>e^2.$$

ومنه نجد أن:

$$f'(x)<0;\qquad \forall x\in]e^2,\infty[.$$

ومنه:

$$f(x+1)<f(x);\qquad \forall x\in]e^2,\infty[$$

وبالتَّالي فإنَّه يوجد عدد طبيعي $m>e^2\approx 7.4$ وليكن $m=8$ بحيث:

$$f(n+1)<f(n);\qquad \forall n\geqslant m\Longrightarrow a_{n+1}<a_n;\qquad \forall n\geqslant m.$$

كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ (وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$) مُتقارِبَة (والتَّقارُب شَرْطِي، تَحَقَّقْ من ذلك!) حسب اختبار لايبْنِتْز.

ومن أجل المجموع لهذه المُتَسَلْسِلَة، حسب www.wolframalpha.com، فإنَّ:

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n:=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\ln k}{\sqrt{k}}=-0.1933.$$

وبرمجياً باستخدام Python 3.10.7، كما في التمارين السابقة والأشكال المرتبطة بها، فإنَّنا نجد أنَّ:

$$s_{10^5}\approx-0.2114923275,\qquad s_{10^6}\approx-0.2001965854,\qquad s_{10^7}\approx-0.1958373263,$$

$$s_{10^8} \approx -0.1942098657, \qquad s_{10^9} \approx -0.1936164952.$$

ومنه نلاحظ التقارب البطيء للمتتالية $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ للنهاية -0.1933.

التمرين 162

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}.$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَنَاوِبَة، فهي من الشكل: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$، حيث أنَّ:
$a_n = \frac{n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}} \geqslant 0; \ \forall n \geqslant 1$. لنأخذ الآن الدَّالَّة:

$$f : [1,\infty[\longrightarrow [0,\infty[, \qquad f(x) = \frac{x}{(x+2)\sqrt[4]{x+1}}.$$

فنجد أنَّ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+2)\sqrt[4]{x+1} - x\left(\sqrt[4]{x+1} + \frac{1}{4}(x+1)^{-3/4}(x+2)\right)}{(x+2)^2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{2 - \frac{x(x+2)}{4(x+1)}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}} = \frac{-x^2+6x+8}{(x+2)^2(x+1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

إن:

$$\begin{aligned} h(x) &:= -x^2+6x+8 < 0; \qquad \forall x \in [8,\infty[\\ &\Longrightarrow f'(x) < 0; \qquad \forall x \in [8,\infty[\\ &\Longrightarrow f(x+1) < f(x); \qquad \forall x \in [8,\infty[. \end{aligned}$$

وبالتَّالي فإنَّه يوجد عدد طبيعي، وليكن $m = 8$، بحيث:

$$f(n+1) < f(n) \Longrightarrow a_{n+1} < a_n; \qquad \forall n = 8, 9, \ldots$$

كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 0.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n a_n$ (وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$) مُتقَارِبَة (والتَّقارُب شَرْطِي، تَحَقَّقْ من ذلك!) حسب اختبار لايْبِنْتز.
ومن أجل المجموع لهذه المُتَسَلْسِلَة، حسب www.wolframalpha.com، فإنَّ:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n := \frac{(-1)^k k}{(k+2)\sqrt[4]{k+1}} = -0.105312.$$

وبرمجيًا باستخدام Python 3.10.7، كما في التمارين السابقة والأشكال المرتبطة بها، فإنّنا نجد أنَّ:

$$s_{10^5} \approx -0.0771955461, \quad s_{10^6} \approx -0.0895005938, \quad s_{10^7} \approx -0.0964205496,$$
$$s_{10^8} \approx -0.1003119447.$$

ومنه نلاحظ التقارب البطيء للمتتالية $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ للنهاية -0.105312.

التمرين 163

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطاة مُتَنَاوِبَة، ومُتَسَلْسِلَة القيم المطلقة لحدودها هي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

إنَّ:

$$\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}, \; n \longrightarrow \infty.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}$ مُتَبَاعِدَة (نقارنها مع المُتَسَلْسِلَة التَّوافُقِيَّة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ مُتَبَاعِدَة أيضًا. وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة لن تكون مُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق. لكن، لدينا:

$$\frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة المُتَنَاوِبَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}$، فهي من الشكل $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$، حيث أنَّ: $b_n = \frac{\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}} \geqslant 0;\; \forall n \geqslant 1$. في البداية نلاحظ أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{n+2}} = 0.$$

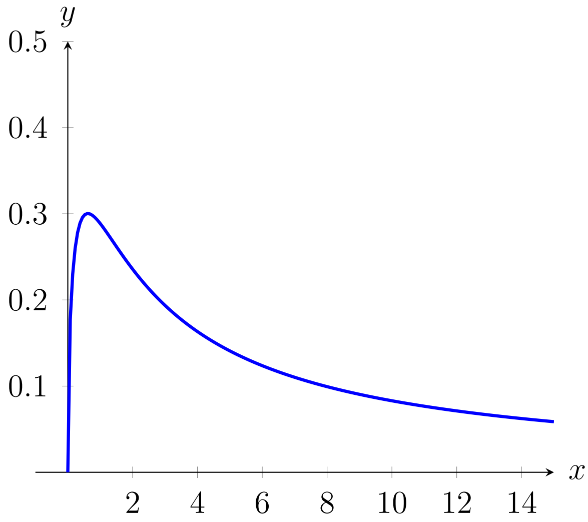
لنأخذ الآن الدَّالَّة:

$$f : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[, \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x+2}}.$$

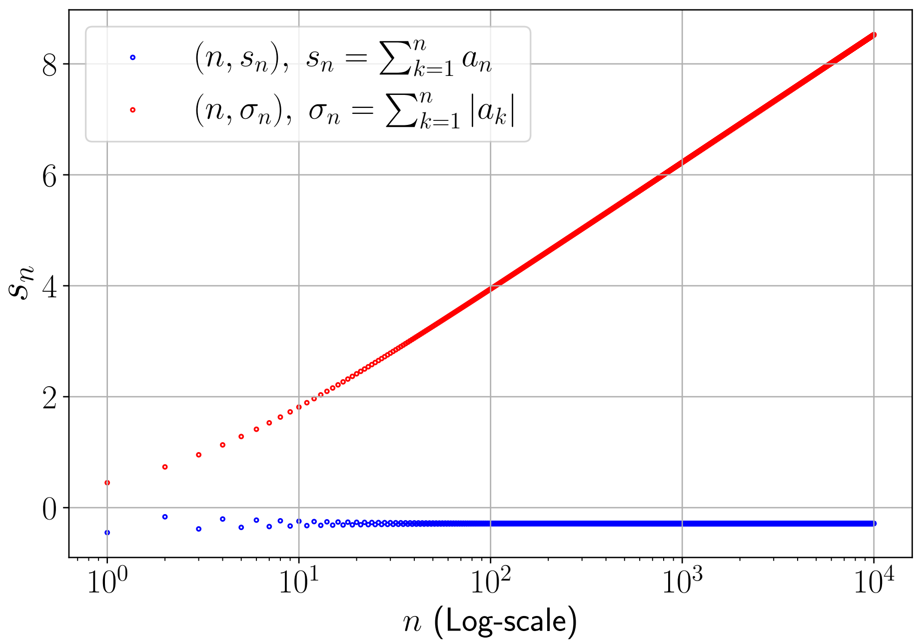
فنجد أنَّ:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 2}{2\sqrt{x}(x+1)^2(x+2)^{3/2}} < 0, \qquad \forall x \geqslant 1.$$

ومنه فإنَّ الدَّالَّة f مُتَناقِصة على المجال $]1,\infty[$ (انظر الشكل 58.5). ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}$ (وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة) مُتقَارِبة (والتَّقارُب شَرْطِي) حسب اختبار لايبنتز (انظر الشكل 59.5).



شكل 58.5: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x+2}}$، ضمن المجال $]0,\infty[$. من الشكل نلاحظ أنَّ الدَّالَّة f مُتَناقِصة على المجال $]1,\infty[$.



شكل 59.5: النقاط (n,s_n)، (n,σ_n) حيث أنَّ: $1\leqslant n\leqslant 10^4$، $s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$، $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ و $a_k=\frac{k}{(k+1)\sqrt{k+2}}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

في الشكل 59.5 لدينا: $s_{10^4} \approx -0.2859945157$، كما أنَّه لدينا:

$$s_{10^7} \approx -0.2860444549, \quad s_{10^8} \approx -0.2860444999, \quad s_{10^9} \approx -0.2860445044.$$

ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx -0.286$.

التمرين 164

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}.$$

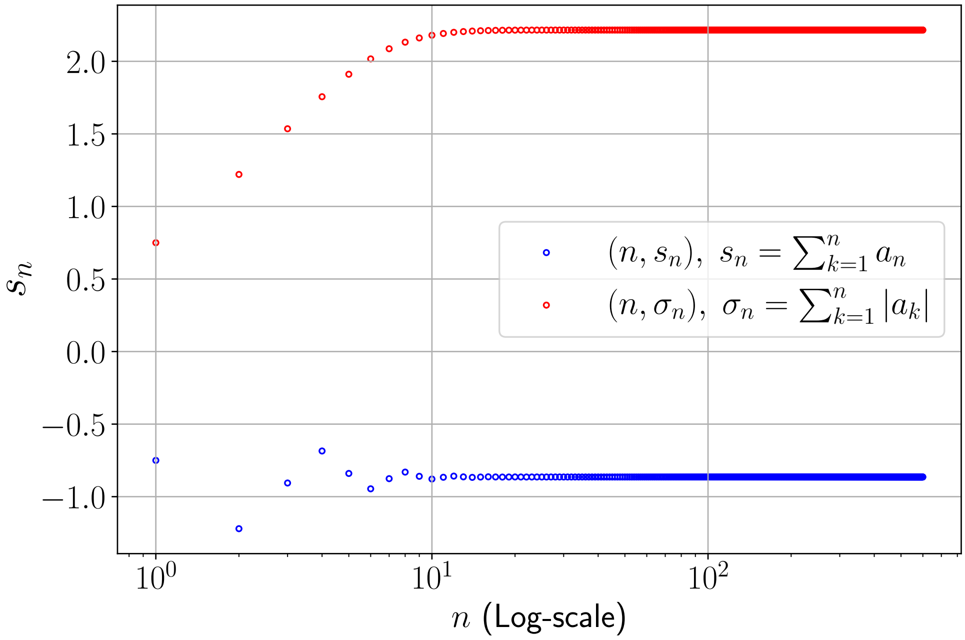
الحل: لنضع: $a_n := (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$، إنَّ:

$$|a_n| = \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3} = \frac{2^n\left(1+\frac{n^2}{2^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{n^3}{3^n}}.$$

لنضع: $b_n := \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{n^3}{3^n}}$ و $c_n := \left(\frac{2}{3}\right)^n$، فنجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{n^3}{3^n}} = 1$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ مُتَقارِبَة (هَنَدَسيَّة أساسها أصغر من الواحد)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مُتَقارِبة حسب اختبار المُقارَنة الثاني، وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ المُعطَاة مُتَقارِبَة (وبِالإِطْلَاق) (انظر الشكل 60.5).



شكل 60.5: النقاط (n, s_n)، (n, σ_n) حيث $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$، $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ و $1 \leqslant n \leqslant 600$.

في الشكل 60.5 لدينا: $s_{600} \approx -0.8643048225$، $\sigma_{600} \approx 2.2154587788$. ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \approx -0.86$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \approx 2.22$.

التمرين 165

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

الحل: المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة مُتَنَاوِبَة، فهي من الشكل: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$، حيث أنَّ: $a_n = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) > 0;\ \forall n \geqslant 1$. إنَّ:

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) \sim 1 - \left(1 - \frac{\pi^2}{2n} + \frac{\pi^4}{4!n^2}\right) = \frac{\pi^2}{2n} - \frac{\pi^4}{24n^2}; \qquad n \longrightarrow \infty.$$

ومنه:

$$(-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim (-1)^n \left(\frac{\pi^2}{2n} - \frac{\pi^4}{24n^2}\right).$$

لنأخذ الآن الدَّالَّة:

$$f : [1, \infty[\longrightarrow]0, \infty[, \qquad f(x) = \frac{\pi^2}{2x} - \frac{\pi^4}{24x^2}.$$

فنجد أنَّ:

$$f'(x) = -\frac{\pi^2}{2x^2} + \frac{\pi^2}{12x^3} = -\frac{\pi^2}{2x^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{6x}\right) < 0; \qquad \forall x \in [2, \infty[.$$

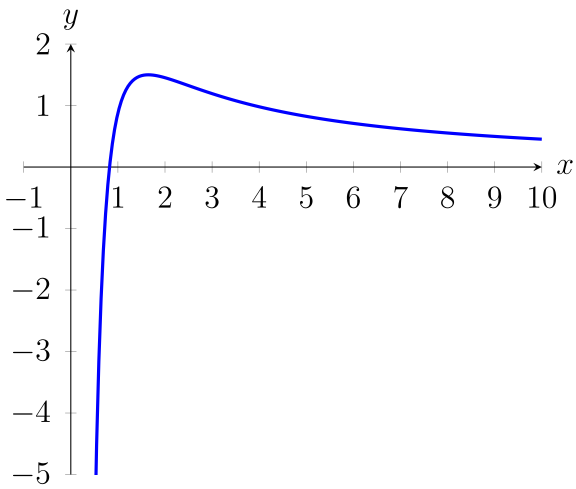
ومنه فإنَّ الدَّالَّة f مُتَنَاقِصَة على المجال $[2, \infty[$ (انظر الشكل 61.5). وبالتَّالي فإنَّه يوجد عدد طبيعي، وليكن $m = 2$، بحيث:

$$f(n+1) < f(n) \Longrightarrow a_{n+1} < a_n; \qquad \forall n = 2, 3, \ldots$$

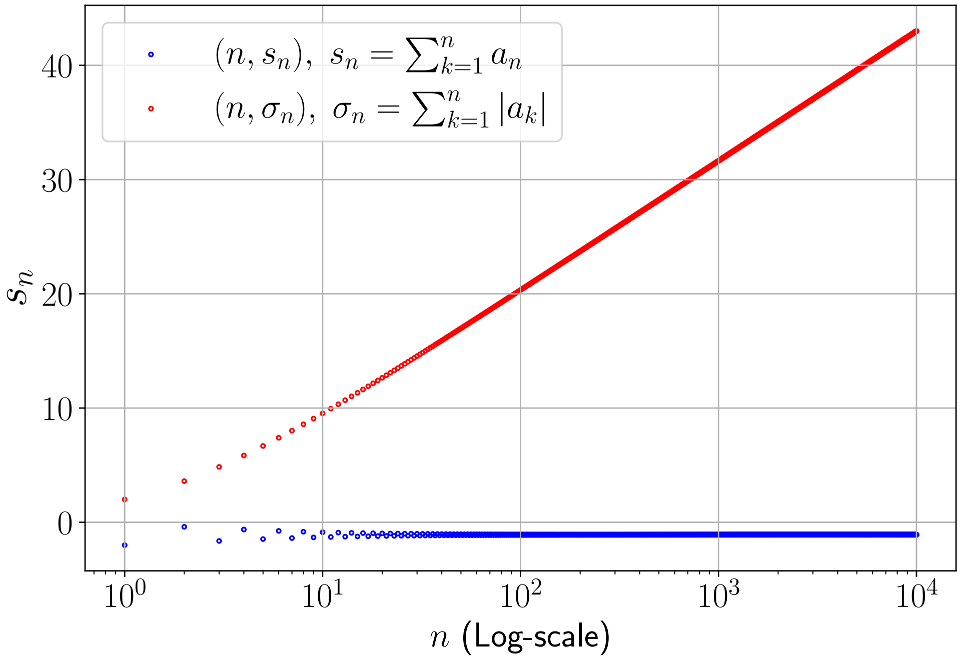
كما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right] = 0$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ (وبالتَّالي فإنَّ المُتَسَلْسِلَة المُعطَاة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$) مُتَقَارِبَة (والتَّقارُب شَرْطِي، تَحَقَّقْ من ذلك!) حسب اختبار لايِبْنِتْز (انظر الشكل 62.5).



شكل 61.5: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x) = \frac{\pi^2}{2x} - \frac{\pi^4}{24x^2}$، ضمن المجال $]0, \infty[$.



شكل 62.5: النقاط (n, s_n)، (n, σ_n) حيث أنَّ: $1 \leqslant n \leqslant 10^4$ و $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$، $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

في الشكل 62.5 لدينا: $s_{10^4} \approx -1.0863565477$. كما أنَّه لدينا:

$$s_{10^5} \approx -1.0865785815, \qquad s_{10^6} \approx -1.0866007878, \qquad s_{10^7} \approx -1.0866030085.$$

ومنه يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right) \approx -1.0866$.

الفصل 6

الجِداءات الحَقيقِيَّة غير المُنتَهِيَة

في هذا الفصل سنقدم عرضًا نظريًّا مختصراً، مع مجموعة متنوعة من التمارين المحلولة لمفهوم الجِداءات غير المُنتَهِيَة (اللانهائيَّة)، وهو أحد المفاهيم المهمة في التحليل الرياضي، والتي لها ارتباط وثيق، كما سنرى، بالمُتَسَلسِلات غير المُنتَهِيَة. ستقتصر دراستنا على الجِداءات الحَقيقِيَّة، إذ يمكن تعميم الدراسة بسهولة إلى مجموعة الأعداد العقدية، وبالتَّالي دراسة الجِداءات العقدية غير المُنتَهِيَة. في البداية سنعرض تعريف الجِداء غير المنته ومُتتَالِيَة الجِداءات الجُزئِيَّة المرتبطة به، وبعدها مَفهومَي التَّقارُب والتَّباعُد لهذه الجِداءات. بعد ذلك سنعرض العلاقة بين الجِداءات والمُتَسَلسِلات غير المُنتَهِيَة، وأوجه الشبه والاختلاف بينهما من حيث دراسة التَّقارُب والتَّباعُد. وأخيراً سنعرض مَفهومَي التَّقارُب بِالإِطْلَاق والتَّقارُب الشَّرطِي للجِداءات الحَقيقِيَّة غير المُنتَهِيَة. كما أنَّه لكل مفهوم سيتم تناوله، سيتمُّ عرض العديد من الأمثلة التَّوضيحيَّة والتمارين المحلولة بشكل مختصر أحياناً ومُفصَّل أحياناً أخرى، ليَتِمَّ في النِّهاية التَّمكُّن من التعامل مع مفهوم الجِداءات غير المُنتَهِيَة بشكل جيد.

1.6 خُلاصَةٌ نظريَّة

إنَّ عمليَّة الجمع من العمليات المألوفة والسهلة مقارنة مع عملية الضرب. لذلك فإنَّه عند حساب الجِداء

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

وذلك بفرض أنَّ $a_k > 0$ لأجل كل $k = 1, 2, \dots, n$، فإنَّه باستخدام خواص اللُّوغَارِتْمَات، يمكن أن نكتب:

$$\log_b\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \log_b(a_k), \qquad \forall\, 0 < b \neq 1.$$

وبذلك نجد أنَّه تَمَّ تحويل عملية إيجاد حاصل جِداء n عدد حقيقي موجب إلى عملية إيجاد حاصل مجموع اللُّوغَارِتْمَات لهذه الأعداد. بحساب هذا المجموع، وليكن s، يمكن بسهولة إيجاد الجِداء $\prod_{k=1}^{n} a_k$، حيث أنَّ: $\prod_{k=1}^{n} a_k = b^s$. ومن هنا نجد ربطًا بين مَفهومَي الجِداء والمجموع المُنتَهِيَيْن. فيما سيأتي سندرس التَّعميم لهذا الربط بين المَفهومَيْن إلى الحالة التي يكون فيها عدد الحدود غير منته.

تعريفات 5:

(1) لتكن $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$، مُتَتَالِيَة عَدَدِيَّة حَقيقيَّة. نسمي: $\cdots a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$، والذي سنرمز له بـ $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$، **جِداء عَدَدي حَقيقي غير منته (أو لا نهائي)**. ونسمي الأعداد $a_1, a_2, \dots$ حدود الجِداء، و a_n حده العام.

(2) ندعو المُتَتَالِيَة $\{P_n\}_{n\geqslant 1}$، حيث:

$$P_1 = a_1, \;\; P_2 = a_1 \cdot a_2, \;\; P_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \;\; \dots, P_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

مُتَتالِيَة الجِداءات الجُزئِيَّة للجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$.

(3) لتكن $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$، مُتَتَالِيَة عَدَدِيَّة حَقيقيَّة (حدودها موجبة أو سالبة أو معدومة). ولتكن $\{P_n\}_{n\geqslant 1}$ مُتَتَالِيَة الجِداءات الجُزئِيَّة للجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$.

- إذا كان: $\lim_{n\to\infty} P_n = p \in \mathbb{R}^*$ (أي أنَّ النهاية $\lim_{n\to\infty} P_n$ موجودة ومحدودة $(p \neq \pm\infty)$ ولا تساوي الصفر)، فإنَّنا نقول إنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ **مُتَقَارِب** من p، ونكتب: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = p$.
- إذا كان: $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ (ويحصل هذا إذا كان عدد غير منته من الحدود معدومًا، أو $a_n \neq 0, \; \forall n \geqslant 1$ لكن $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$) فإنَّنا نقول إنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ **مُتَبَاعِد إلى الصفر** (إذ إنَّ هذه الحالة، عندما $a_n > 0, \; \forall n \geqslant 1$، ستقابل تَباعُد المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_n)$ إلى $-\infty$. انظر الملاحظة 17).

• إذا كان: $\lim_{n\to\infty} P_n = \pm\infty$، أو النهاية $\lim_{n\to\infty} P_n$ غير موجودة. فإنَّنا نقول إنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ **مُتباعِد**.

ملاحظة 16:

تَعرَّفنا في التَّعريفات (5) على مفهوم تَباعُد الجِداء غير المنته $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ إلى الصفر. لكن إذا وُجِدَ عدد طبيعي m بحيث $a_i = 0$ لأجل كل $i = 1, 2, \ldots, m$ (أي أنَّه يوجد m حد معدوم من الحدود $a_1, a_2, \ldots$) عندئذ فإنَّه يُمكِنُنا عزل هذه الحدود ودراسة الجِداء $\prod_{n=m+1}^{\infty} a_n$. فإذا كان هذا الجِداء مُتقَارِبًا (أي $\lim_{n\to\infty} (P_n = \prod_{k=m+1}^{n} a_k) = p \in \mathbb{R}^*$) فإنَّنا نقول إنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتقَارِب إلى الصفر، ونكتب: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

أمثلة 27:

(1) من أجل الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} 2^{-(2^{-n})}$، لدينا:

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n} 2^{-(2^{-k})} = \prod_{k=1}^{n} 2^{-\left(\frac{1}{2^k}\right)} = 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2^2}} \cdots 2^{-\frac{1}{2^n}} \\ &= 2^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)} = 2^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}} = 2^{-\sum_{i=1}^{n}(1/2)^i}. \end{aligned}$$

لكن:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*.$$

ومنه فإنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} 2^{-(2^{-n})}$ مُتقَارِب من $\frac{1}{2}$، ونكتب: $\prod_{n=1}^{\infty} 2^{-(2^{-n})} = \frac{1}{2}$.

(2) من أجل الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$، لدينا:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{-k} = 2^{-1} \cdot 2^{-2} \cdots 2^{-n} = 2^{-(1+2+\ldots+n)} = 2^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} = 0.$$

لاحظ أنَّ: $a_n = 2^{-n} \neq 0,\ \forall n \geqslant 1$. ومنه فإنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ مُتباَعِد إلى الصفر.

(3) من أجل الجِداء $\prod_{n=2}^{\infty} (1-\frac{1}{n})$، والذي ندعوه الجِداء التَّوافُقِي (harmonic product)، لدينا:

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdots\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

وبالتَّالي فإنَّ الجِداء التَّوافُقِي $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n})$ (لاحظ أنَّ $1-\frac{1}{n}\neq 0,\ \forall n\geqslant 2$) مُتباَعِد إلى الصفر.

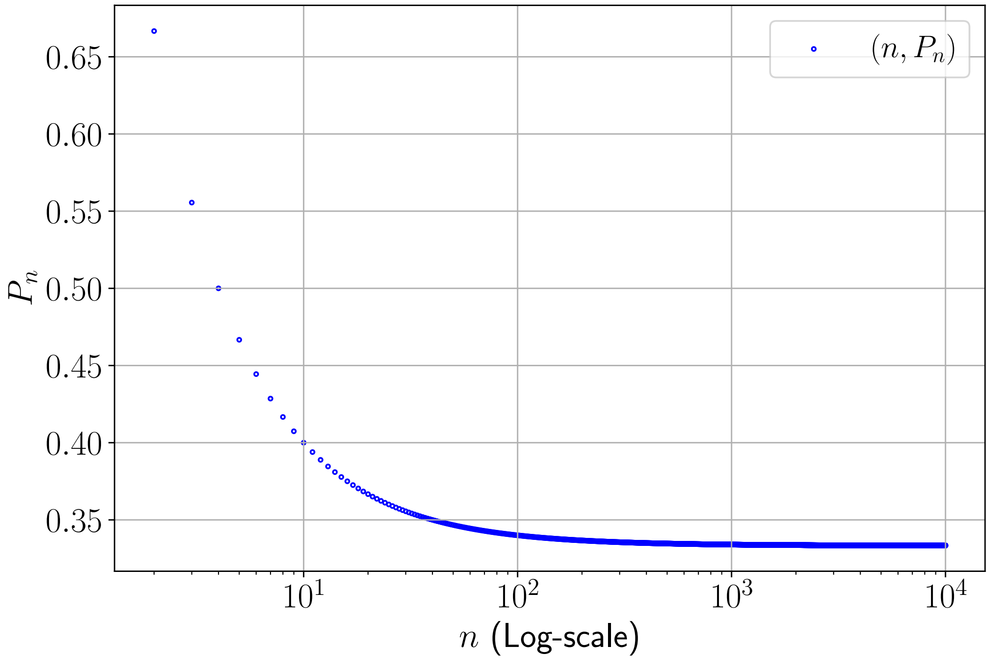
(4) من أجل الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$، نضع: $a_n = 1-\frac{2}{n(n+1)},\ \forall n\geqslant 1$. نلاحظ أنَّ: $a_1 = 0$ و $a_n \neq 0,\ \forall n\geqslant 2$. لندرس الآن طبيعة الجِداء $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$. إنَّ:

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k(k+1)-2}{k(k+1)} \\ &= \frac{2\cdot3-2}{2\cdot3}\cdot\frac{3\cdot4-2}{3\cdot4}\cdot\frac{4\cdot5-2}{4\cdot5}\cdot\frac{5\cdot6-2}{5\cdot6}\cdot\frac{6\cdot7-2}{6\cdot7}\cdots \\ &\quad\cdot\frac{(n-2)(n-1)-2}{(n-2)(n-1)}\cdot\frac{n(n-1)-2}{n(n-1)}\cdot\frac{n(n+1)-2}{n(n+1)} \\ &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot 3}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{6}}{\cancel{4}\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{7}}{\cancel{5}\cdot\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{8}}{\cancel{6}\cdot\cancel{7}}\cdots\frac{\cancel{(n-3)}\cancel{n}}{\cancel{(n-2)}\cancel{(n-1)}}\cdot\frac{\cancel{(n-2)}\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n-1)}\cancel{n}} \\ &\quad\cdot\frac{\cancel{(n-1)}(n+2)}{n\cancel{(n+1)}} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}. \end{aligned}$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

وبالتَّالي فإنَّ: $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$ (انظر الشكل 1.6).



شكل 1.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{2, 3, \ldots, 10^4\}$ و $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 0.33339999$.

ومنه فإنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ مُتقَارِب إلى الصفر. ونكتب:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = 0.$$

ملاحظة 17:

إذا كان: $a_n > 0,\ \forall n \geqslant 1$، و $b \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$، فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log_b\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\log_b(a_k)\right) = s.$$

- إذا كانت $s \in \mathbb{R}$ (أي أنَّ النهاية موجودة ومحدودة)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\log_b(a_n)$ تكون مُتَقَارِبَة من s. ومنه فإنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ يكون مُتقَارِبًا من b^s. ونكتب:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = b^s \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\log_b(a_n) = s.$$

• إذا كان $s=+\infty$، فإنَّ المُتَسلسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log_b(a_n)$ تكون مُتباعِدَة، ومنه فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ يكون مُتباعِدًا إلى $+\infty$.

• إذا كان $s=-\infty$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log_b(a_n)$ تكون مُتَباعِدَة إلى $-\infty$، ومنه فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ يكون مُتَباعِدًا إلى الصفر.

لذلك فإنَّه يُمكِننا دراسة طبيعة الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (حيث $a_n>0,\ \forall n\geqslant 1$) من خلال دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log_b(a_n)$ حيث $b\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$. إذ إنَّهما من طبيعة واحدة (مُتقَارِبَان معًا أو مُتباعِدَان معًا).

فيما سيأتي نذكر مبرهنة يتوضَّح فيها الشَّرط اللَّازم وغير الكافي لتَّقارُب الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

مبرهنة 10:

إذا كان الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ مُتقَارِبًا، فإنَّ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

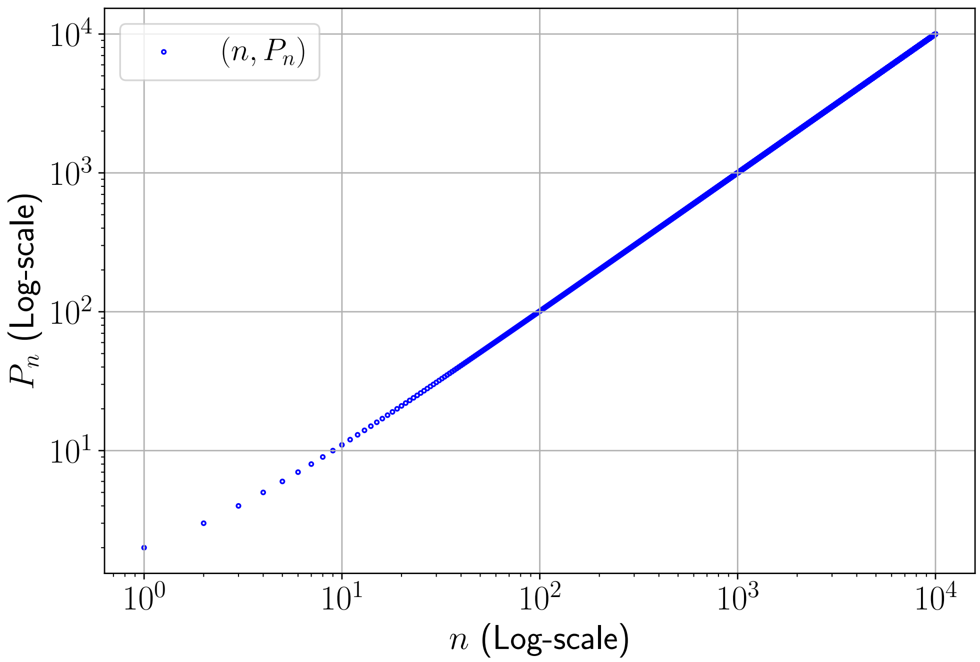
المبرهنة 10 تكافئ القول: "إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 1$، أو النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ غير موجودة. فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ يكون مُتبَاعِدًا".

ملاحظة 18:

إنَّ عكس المبرهنة 10 غير صحيح في الحالة العامة. فعلى سبيل المثال، من أجل الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$. لدينا: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$. إلا أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdots\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

ومنه فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$ مُتبَاعِد (انظر الشكل 2.6).



شكل 2.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ و $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$.

كما أنَّه من أجل الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$ لدينا:

$$a_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots & \text{if } n \text{ is odd} \\ 2, 4, 6, \ldots & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

نلاحظ أنَّ $a_n = n$ عندما يكون $n \geqslant 2$ زوجيًا، و $a_n = \frac{1}{n}$ عندما يكون $n \geqslant 1$ فرديًا. أي: $a_{2n} = 2n, \ \forall n \geqslant 1$ و $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}, \ \forall n \geqslant 1$ حيث $a_1 = 1$. وبالتَّالي فإنَّ النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ غير موجودة. ومنه فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$ مُتباعِد.

ملاحظة 19:

من المناسب في كثير من الأحيان دراسة الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ بدلًا من $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ومنه يصبح الشَّرط اللازم وغير الكافي للتَّقارُب هو $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. وإذا كان $a_n > -1, \ \forall n \geqslant 1$، فإنَّ الشَّرط اللازم والكافي لتقارُبِ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ هو أن تَتقارَب المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$.

فيما سيأتي نذكر مبرهنة أساسية، يمكن من خلالها دراسة تَقارُب أو تَباعُد الجِداءات غيرالمُنتَهِيَة التي

لها الشكل $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ أو $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ من أجل $a_n \geqslant 0,\ \forall n \geqslant 1$. (انظر المبرهنة 1.2.2 والمبرهنة 2.2.2 والنتيجة 3.2.2 من [20]).

مبرهنة 11:

ليكن: $a_n \geqslant 0,\ \forall n \geqslant 1$. إنَّ الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ (أو $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$) والمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ من طبيعة واحدة (مُتَقَارِبَان معاً أو متباعِدَان معاً).

أمثلة 28:

(1) حسب المبرهنة 11. نجد أنَّ كلّاً من الجداءَين:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right),\quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^p}\right)$$

مُتقارِب عندما يكون $p>1$، ومُتباعِد عندما يكون $p \leqslant 1$. إذ إنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ مُتقارِبة عندما يكون $p>1$، ومُتَبَاعِدَة عندما يكون $p \leqslant 1$.

(2) من أجل الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$. نجد أنَّ:

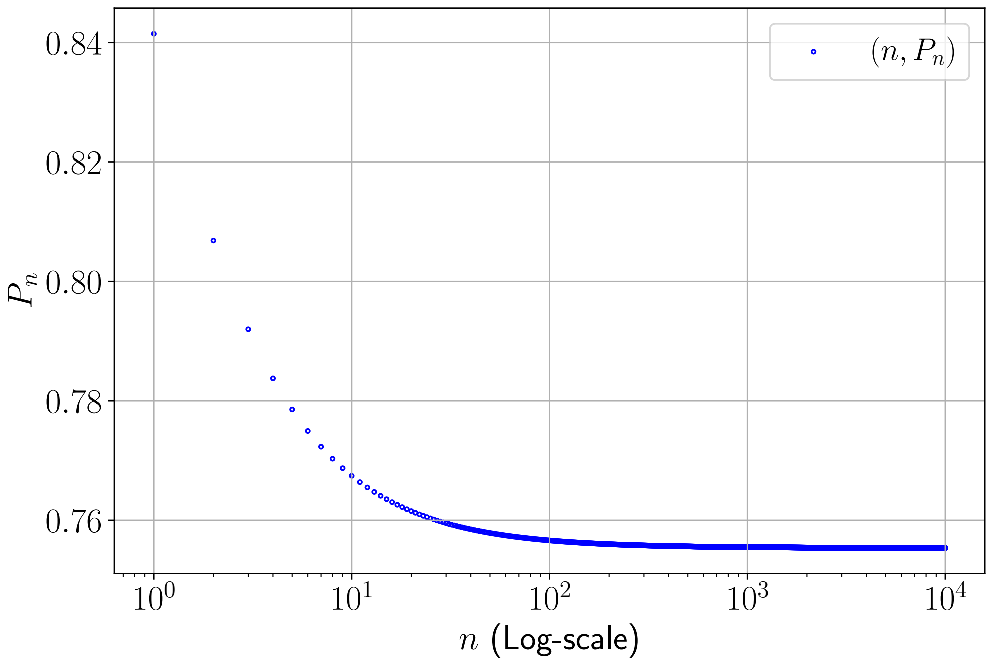
$$\prod_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)\right)$$

وبما أنَّ: $\sin\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n},\ \forall n \geqslant 1$، فإنَّ: $n\sin\frac{1}{n} \leqslant 1,\ \forall n \geqslant 1$. ومنه فإنَّ: $a_n := 1-n\sin\frac{1}{n} \geqslant 0,\ \forall n \geqslant 1$. أي أنَّ شرط المبرهنة 11 محقق. لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$.

إنَّ:

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}-\frac{1}{3!\cdot n^3},\quad n\longrightarrow\infty \Longrightarrow 1-n\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^2},\quad n\longrightarrow\infty.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^2}$ مُتَقَارِبَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$ مُتَقَارِبَة. ومنه حسب المبرهنة 11، نجد أنَّ الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ مُتَقَارِب (انظر الشكل 3.6).



شكل 3.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)$ و $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$.

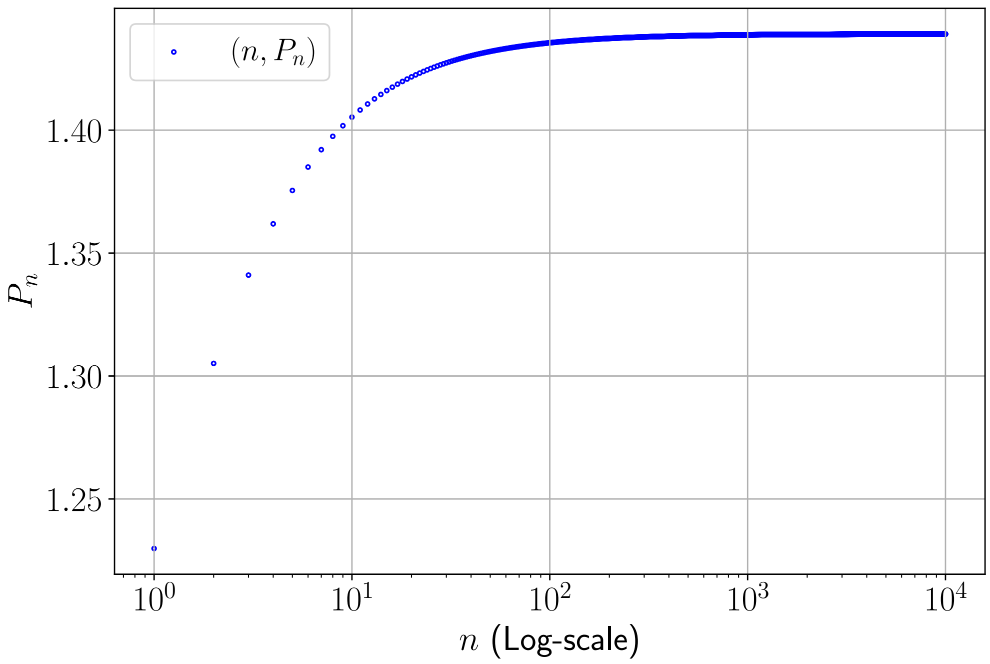
في الشكل 3.6 لدينا: $P_{10^4} \approx 0.7553759773838381$. إنَّ تَقارُب الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ بطيء جدًا. إذ إنَّ $P_{10^6} \approx 0.7553635144124765$ و $P_{10^9} \approx 0.755363374456671$، وحسب https://www.wolframalpha.com نجد أنَّ هذا الجِداء مُتقَارِب من 0.778548.

مثال 29:

من أجل الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\right)$، حيث: $x \in \mathbb{R}$. لنضع: $a_n := \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)$ فنجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} x^2 \cdot \frac{\sin^2(x/n)}{x^2/n^2} = \lim_{n\to\infty} x^2 \cdot \left(\frac{\sin(x/n)}{x/n}\right)^2 = x^2 \geqslant 0.$$

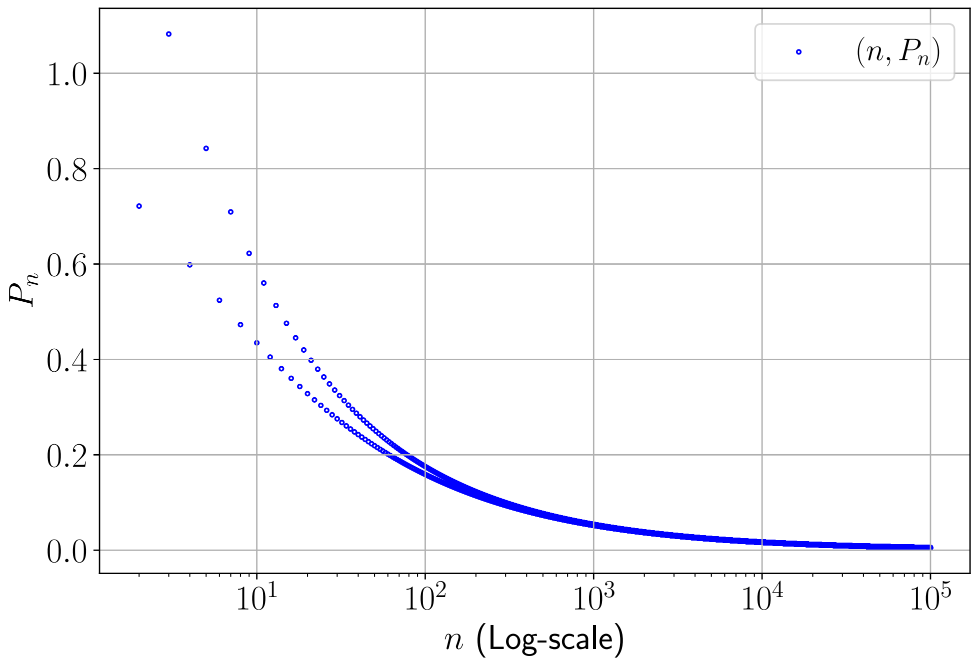
وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ مُتقارِبة (مُتَسَلْسِلَة رِيمَان) فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)$ مُتقارِبة، حسب اختبار المُقارَنة الثاني، مهما تكن $x \in \mathbb{R}$. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ مُتقَارِب مهما يكن $x \in \mathbb{R}$ (انظر الشكل 4.6).



شكل 4.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \sin^2\left(\frac{0.5}{k}\right)\right)$ و $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 1.439$. من هذا الشكل يُمكِننَا التَّخمين بأنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \sin^2\left(\frac{0.5}{n}\right)\right)$ مُتقَارِب من 1.44.

ملاحظة 20:

إنَّ الشَّرط $a_n \geqslant 0, \ \forall n \geqslant 1$ في المبرهنة 11، شرط هام وتَحَقُّقُهُ ضروري لِنتَمكَّن من تطبيق المبرهنة. فإذا لم يكن هذا الشَّرط مُحَقَّقًا، فإنَّ تَقَارُب المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لا يضمن تَقَارُب الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ أو $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$. فعلى سبيل المثال، من المعلوم أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ مُتَقَارِبَة حسب اختبار لايبْنِتْز. إلا أنَّ الجِداء $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ مُتَبَاعِد إلى الصفر (انظر الملاحظة 21 المذكورة في الأسفل. حيث أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ مُتَقَارِبَة شرطيًّا، والمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n^2 = \frac{1}{n}\right)$ مُتَبَاعِدَة). انظر الشكل 5.6.



شكل 5.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ و $n \in \{2, 3, \dots, 10^4\}$.

لنذكر الآن تعريف التَّقارُب بِالإِطْلَاق والتَّقارُب الشَّرطِي لِلجِداءات غير المُنتَهِيَة.

تعريف 6:

نقول عن الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ (حيث $a_n > -1, \ \forall n \geqslant 1$) إنَّه مُتَقَارِب بِالإِطْلَاق (أو مُتَقَارِب شرطيًّا) إذا كانت المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ مُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق (أو مُتَقَارِبَة شرطيًّا).

كما أنَّ كل جِداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$، حيث $a_n \neq -1, \ \forall n \geqslant 1$. مُتَقَارِب بِالإِطْلَاق، هو جِداء مُتَقَارِب أيضًا. ومن أجل دراسة التَّقارُب بِالإِطْلَاق لِلجِداءات غير المُنتَهِيَة يمكن استخدام المبرهنة الآتية (انظر المبرهنة 8.2.2 في [20]).

مبرهنة 12:

الشَّرط اللازم والكافي كي يكون الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$، حيث $a_n \neq -1$ من أجل كل $n \geqslant 1$، مُتَقَارِب بِالإِطْلَاق هو أن تكون المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَة بِالإِطْلَاق (أي إذا وفقط إذا كان

الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ مُتقَارِبًا).

كما أنّه إذا كان الجِداء غير المنته مُتقَارِبًا بِالإِطْلَاق فإنّ تغيير ترتيب مضاريبه لا يؤثر على تَقارُبه ولا على قيمته أيضًا. إلا أنّ هذا الأمر غير صحيح في حالة التَّقارُب الشَّرطِي.

أمثلة 30:

(1) الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right)$ مُتقَارِب بِالإِطْلَاق من أجل كل $\alpha > 1$. وذلك لأنّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ مُتَقارِبَة بِالإِطْلاق من أجل كل $\alpha > 1$.

(2) الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$ مُتقَارِب بِالإِطْلَاق عندما يكون $|x| < 1$. وذلك لأنّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ تكون مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق عندما يكون $|x| < 1$.

(3) من أجل الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)$، لندرس طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$.

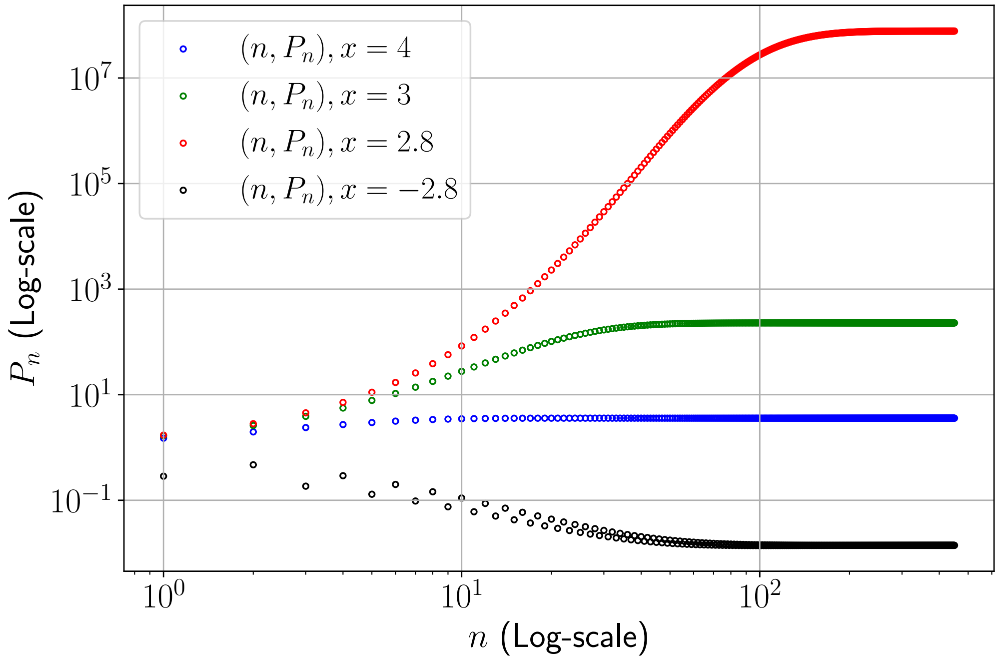
لنضع: $a_n := \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$، ومنه نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{|x|}=\frac{e}{|x|}.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$ تكون مُتَقارِبَة بِالإِطْلَاق، حسب اختبار الجذر لكُوشِي، عندما يكون: $\frac{e}{|x|} < 1$، أي عندما: $|x| > e$. ومنه فإنّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)$ مُتقَارِب بِالإِطْلَاق من أجل كل:

$$x\in]-\infty,-e[\cup]e,+\infty[.$$

انظر الشكل 6.6.



شكل 6.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(1+\frac{1}{k})^{k^2}}{x^k}\right)$ و $1 \leqslant n \leqslant 450$.

في الشكل 6.6 لدينا: $P_{450} \approx 3.59298315$ من أجل $x = 4$، و $P_{450} \approx 228.93499229$ من أجل $x = 3$، و $P_{450} \approx 77426933.9452191$ من أجل $x = 2.8$، و $P_{450} \approx 0.01399643$ من أجل $x = -2.8$.

ملاحظة 21:

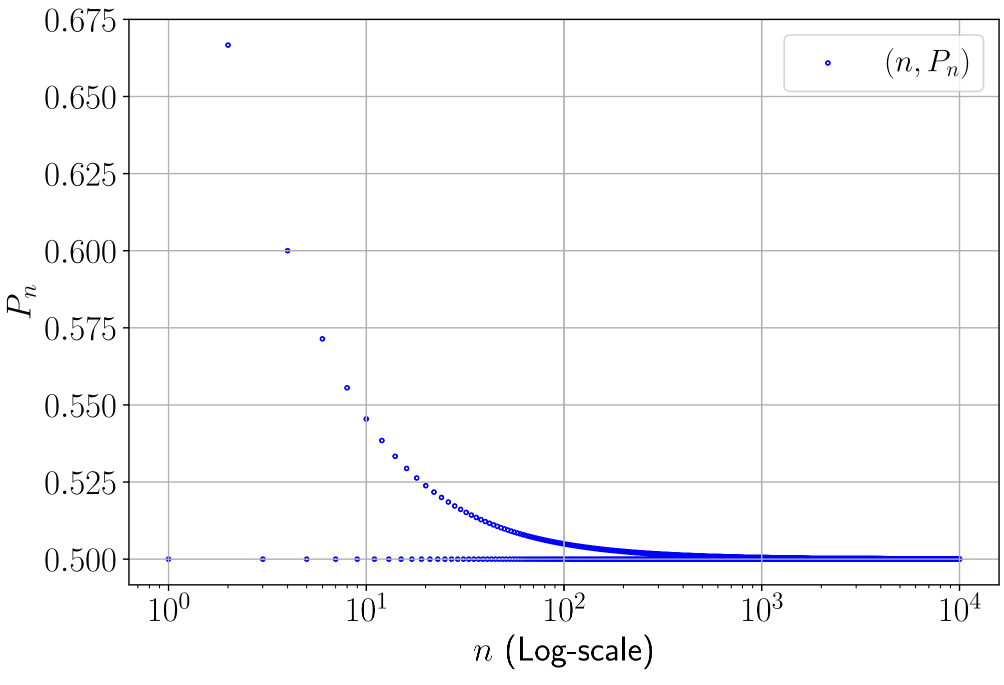
إذا كانت المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ مُتَباعِدَة، والجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ مُتَقارِب، فإنَّ تَقارُبه يكون شرطيًّا. هذا يعني أنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ يكون مُتَقارِبًا، بينما $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ مُتَباعِد. لدراسة التَّقارُب والتَّباعُد في هذه الحالة يُمكِنُنا استخدام اختبار كُوشِي الآتِي (انظر [20]):
ليكن $1 \geqslant n\forall ,1- \neq a_n$، ولنفرض أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ مُتَقارِبَة. عندئذ فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ والمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ من طبيعة واحدة (مُتَقارِبَان معًا أو مُتَباعِدَان معًا).
ويمكن أيضًا تطبيق الاختبار الآتي (في حال فشل اختبار كُوشِي): إذا كانت المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ مُتَقارِبَة شرطيًّا، والمُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ مُتَباعِدَة. فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ يَتَبَاعَد إلى الصفر. أمَّا

إذا كانت المُتَسَلسِلتَان $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ مُتبَاعِدتَان. عندئذ فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ لا يمكن أن يكون مُتقَارِبًا بِالإِطْلَاق. فمن الممكن أن يكون مُتبَاعِدًا أو مُتقَارِبًا تقَارُبٌ شَرطِي.

مثال 31:

من أجل الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{1+n}\right)$، لنضع: $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n}$. نلاحظ أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}$ مُتَبَاعِدَة. إلا أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ مُتَقَارِبَة (وذلك بالمُقَارَنة مع المُتَسَلْسِلَة المُتقَارِبَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$).

كما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ مُتَقَارِبَة حسب اختبار لايبْنِتز (وتقَارُبها شرطي). وبالتَّالي فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{1+n}\right)$ مُتقَارِب شرطيًّا (انظر الشكل 7.6).



شكل 7.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k+1}\right)$ و $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 0.50005$. ويُمكننُا التَّخمين بأنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ مُتقَارِب من 0.5.

2.6 تمارين محلولة (المجموعة الثالثة)

التمرين 1

جد قيمة الجِداء $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

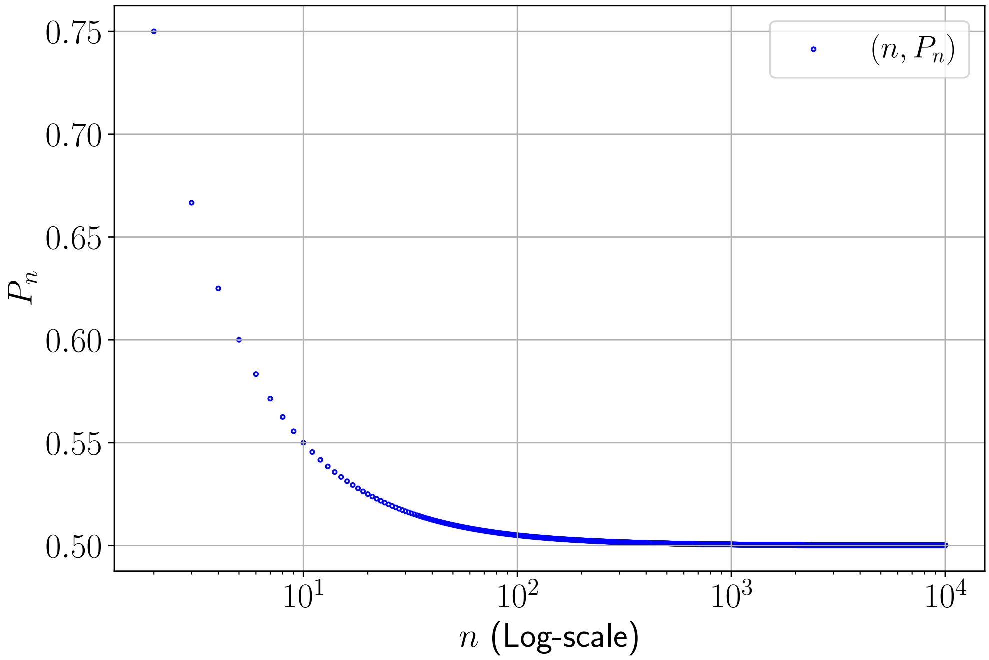
الحل: لنوجد $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$، الحد العام لمُتتالِيَة الجِداءات الجُزئيَّة $\{P_n\}_{n\geqslant 2}$ بدلالة n. إنَّ:

$$\begin{aligned}
P_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\\
&\quad \left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\cdots\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}\cdot\frac{n+1}{n}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.
\end{aligned}$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

وبالتَّالي فإنَّ: $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$ (انظر الشكل 8،6).



شكل 8.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{2, \ldots, 10^4\}$ و $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 0.50004999$.

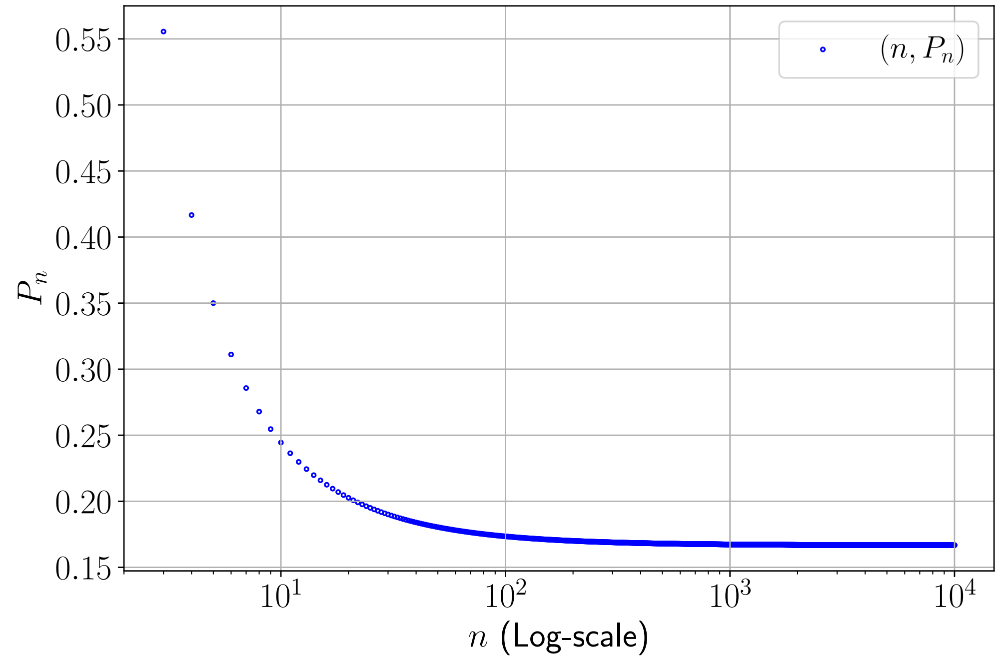
بطريقة مماثلة نجد أنَّ: $\prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{n^2}\right) = \frac{1}{6}$ (انظر الشكل 9.6).

وأنَّ (انظر الشكل 10.6):

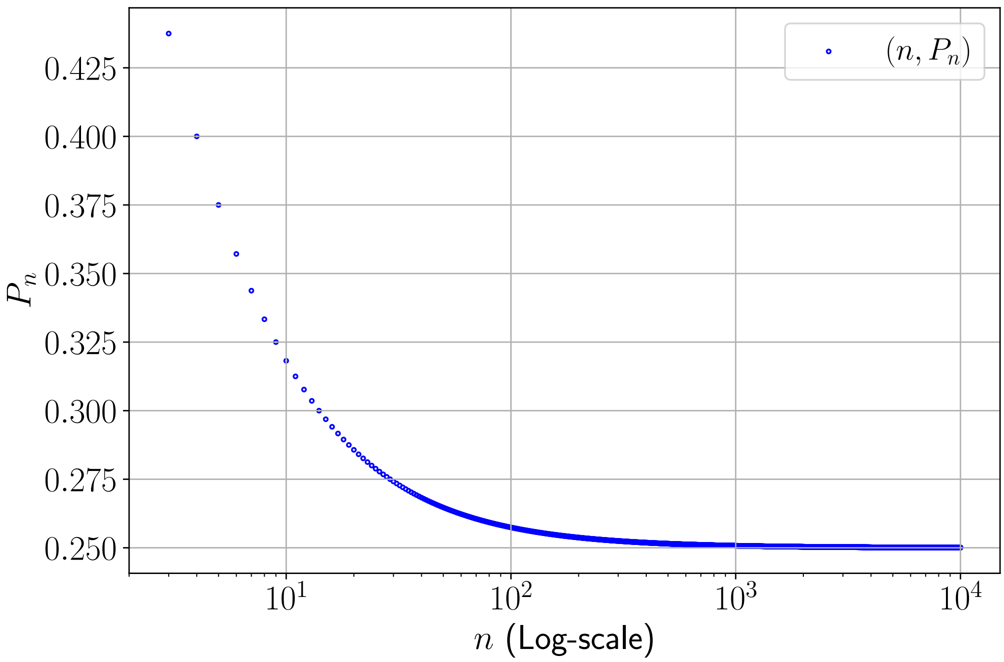
$$\prod_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{4(n+1)} = \frac{1}{4}.$$

وأنَّ (انظر الشكل 11.6):

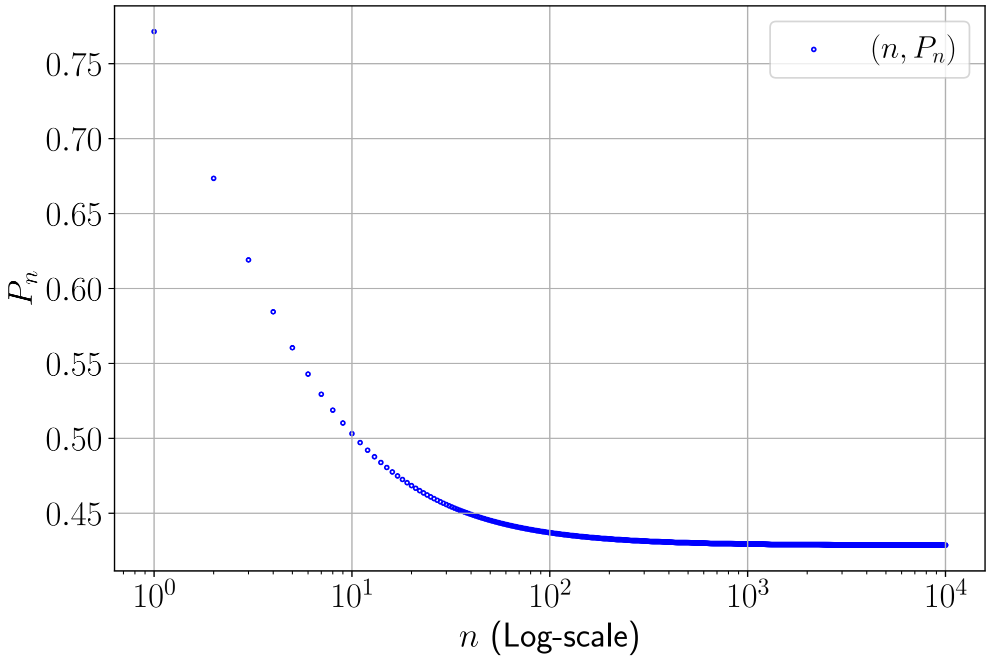
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} = \lim_{n \to \infty} \frac{3(2n+7)}{7(2n+3)} = \frac{3}{7}.$$



شكل 9.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{3, 4, \ldots, 10^4\}$ و $P_n = \prod_{k=3}^{n}\left(1 - \frac{4}{k^2}\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 0.16673334$.



شكل 10.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{3, 4, \ldots, 10^4\}$ و $P_n = \prod_{k=3}^{n}\left(\frac{k^2-4}{k^2-1}\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 0.25007499$.



شكل 11.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k+7)}{(2k+3)(2k+5)}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 0.42865713$.

التمرين 2

جد قيمة الجِداء $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$.

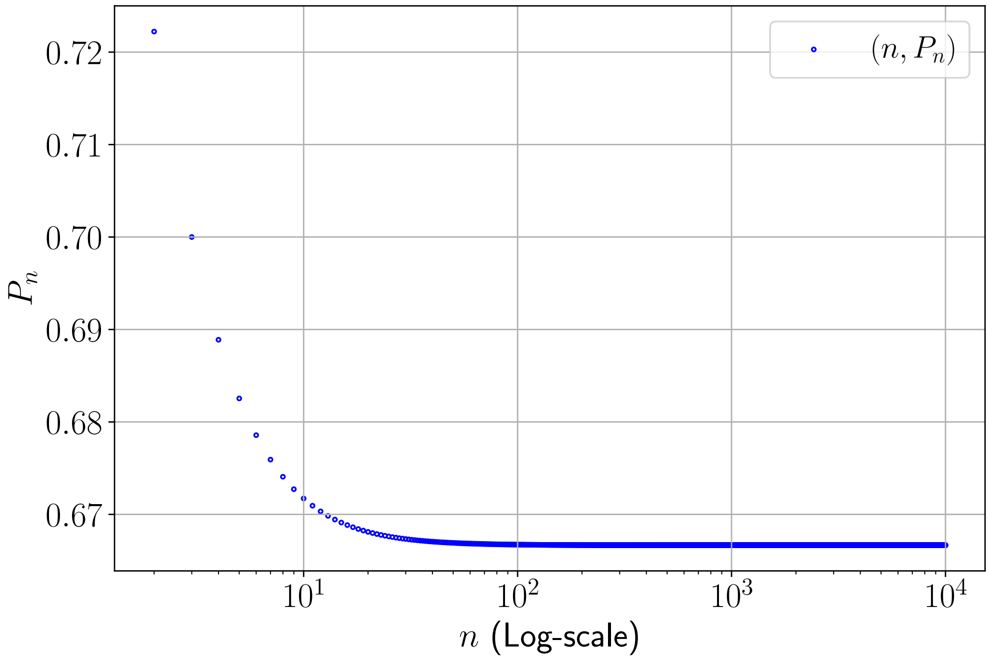
الحل: لنوجد $P_{n+1} = \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^3-1}{k^3+1}$، الحد العام لمُتتالِيَة الجِداءات الجُزئيَّة $\{P_n\}_{n\geqslant 2}$ بدلالة n. إنَّ:

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= \prod_{k=2}^{n+1} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} \\
&= \frac{1\cdot \cancel{7}}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot \cancel{13}}{4\cdot \cancel{7}}\cdot\frac{3\cdot \cancel{21}}{5\cdot \cancel{13}}\cdot\frac{4\cdot \cancel{31}}{6\cdot \cancel{21}}\cdots\frac{(n-2)\cancel{(n^2-n+1)}}{n\cancel{(n^2-3n+3)}}\cdot \\
&\quad \cdot\frac{(n-1)\cancel{(n^2+n+1)}}{(n+1)\cancel{(n^2-n+1)}}\cdot\frac{n(n^2+3n+3)}{(n+2)\cancel{(n^2+n+1)}} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{7}}{9}\cdots\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{n+1}\cdot\frac{\cancel{n}}{n+2}\cdot\frac{n^2+3n+3}{1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}
$$

ومنه

$$
\lim_{n\to\infty} P_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{3}.
$$

وبالتّالي فإنَّ: $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^2+1} = \frac{2}{3}$. (انظر الشكل 12.6).



شكل 12.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{2, 3, \dots, 10^4\}$ و $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 0.66666667$.

التمرين 3

جد قيمة الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$.

الحل: لنوجد الحد العام لمُتَتَالِيَة الجِداءات الجُزئيَّة $\{P_n\}_{n\geqslant 1}$ بدلالة n، حيث:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2 + 2k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

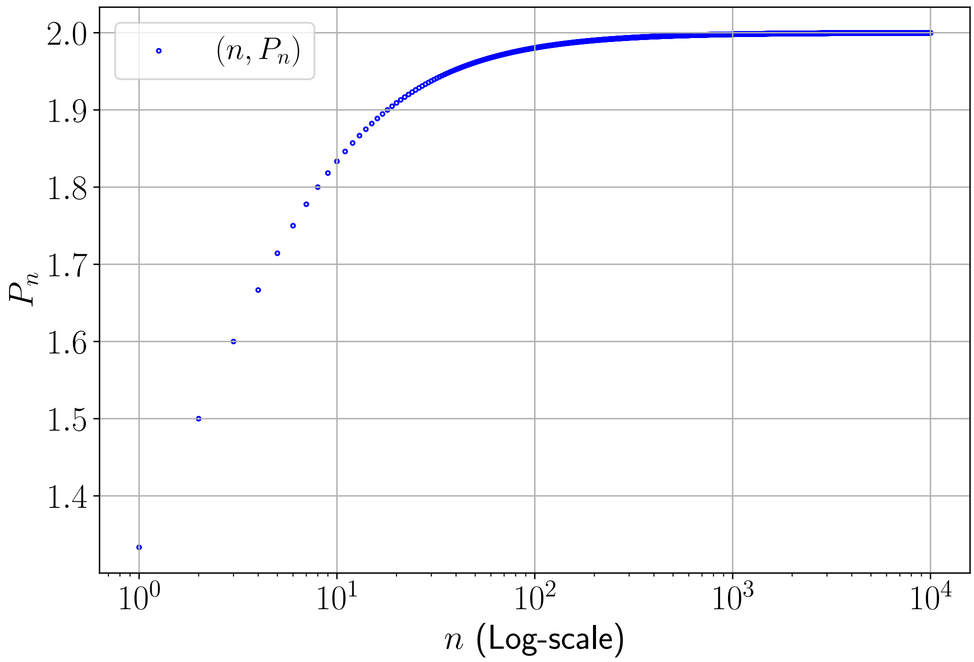
إنَّ:

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \\ &= \frac{2^2}{1\cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2\cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3\cdot 5} \cdot \frac{5^2}{4\cdot 6} \cdot \frac{6^2}{5\cdot 7} \cdots \frac{(n-1)^2}{(n-2)n} \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \frac{2^{\cancel{2}} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{4^2} \cdot \cancel{5^2} \cdot \cancel{6^2} \cdots \cancel{(n-1)^2} \cdot \cancel{n^2} \cdot (n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{4^2} \cdot \cancel{5^2} \cdot \cancel{6^2} \cdots \cancel{(n-1)^2} \cdot \cancel{n^2} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot (n+2)} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2}. \end{aligned}$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} P_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n+2} = 2.$$

وبالتَّالي فإنَّ: $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=2$ (انظر الشكل 12.6).



شكل 13.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 1.99980003$.

التمرين 4

جد قيمة الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} 2^{n/2^n}$.

الحل: لنوجد $P_n=\prod_{k=1}^{n} 2^{k/2^k}$، الحد العام لمُتتَالِيَة الجِداءات الجُزئيَّة $\{P_n\}_{n\geqslant 1}$ بدلالة n. إنَّ:

$$P_n=\prod_{k=1}^{n} 2^{k/2^k}=2^{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}}.$$

لنحسب الآن: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$. نعلم أنَّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}; \qquad |x|<1.$$

ومنه بالاشتقاق نجد:

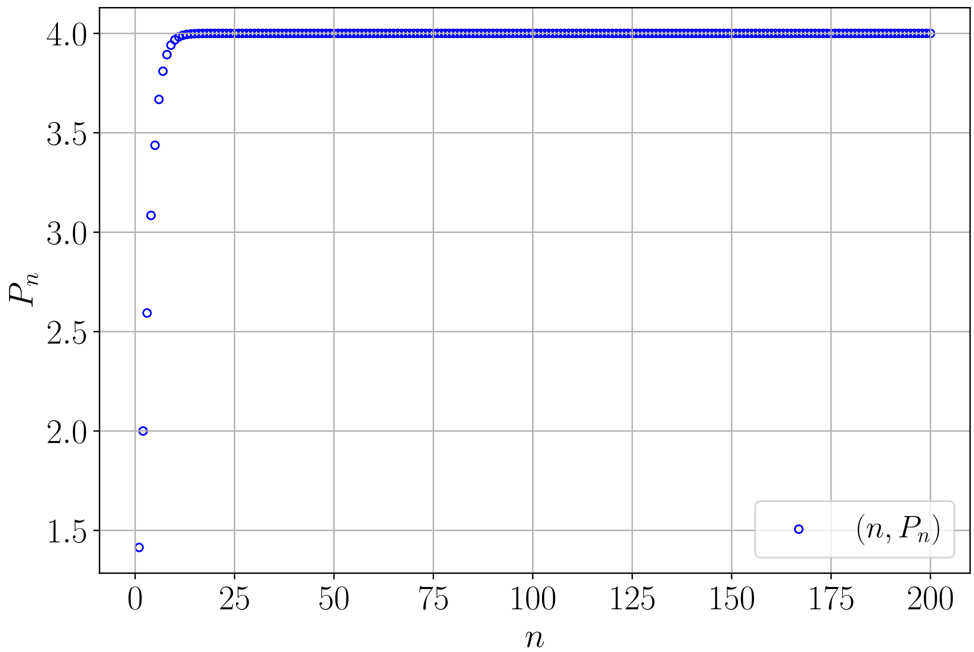
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(x-1)^2}; \qquad |x|<1.$$

وبأخذ $x = \frac{1}{2}$، نجد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{1-n} = 4 \Longrightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 4 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2.$$

وبالتَّالي فإنَّ (انظر الشكل 14.6):

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 2^2 = 4 \Longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} 2^{n/2^n} = 4.$$



شكل 14.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 200\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{k/2^k}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{200} \approx 4$.

التمرين 5

جد قيمة الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1+(1/n)}$.

الحل: لنوجد الحد العام لمُتَتَالِيَة الجِداءات الجُزئِيَّة $\{P_n\}_{n\geqslant 1}$ بدلالة n، حيث:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{1/k}}{1+(1/k)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{ke^{1/k}}{k+1}.$$

إنَّ:

$$\begin{aligned}
\ln\left(P_n\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln k + \frac{1}{k} - \ln(k+1)\right)\\
&= \ln(1) + 1 - \cancel{\ln(2)} + \cancel{\ln(2)} + \frac{1}{2} - \cancel{\ln(3)} + \cancel{\ln(3)} + \frac{1}{3} - \cancel{\ln(4)}\\
&\quad + \cancel{\ln(4)} + \frac{1}{4} - \cancel{\ln(5)} + \ldots + \cancel{\ln(n-1)} + \frac{1}{n-1} - \cancel{\ln(n)}\\
&\quad + \cancel{\ln(n)} + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1).
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
P_n &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\cdot\exp\left(-\ln(n+1)\right) = \frac{\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}{n+1} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}{e^{\ln n}}\\
&= \frac{n}{n+1}\cdot\exp\left(-\ln n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

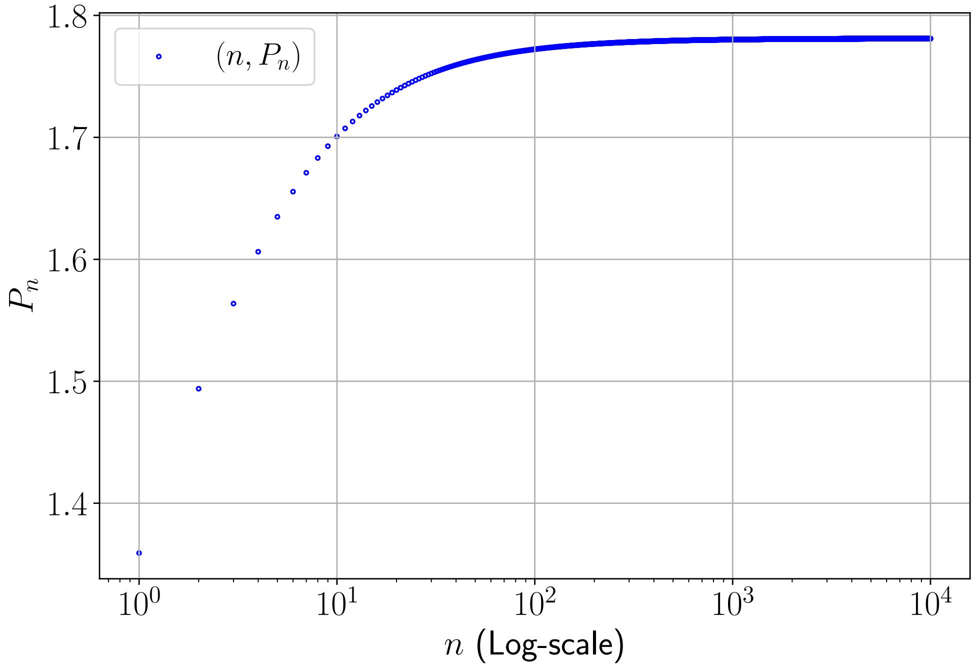
لكن: $\lim_{n\to\infty}\left(-\ln n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \gamma$، حيث:[1] $\gamma \approx 0.57721566$، وبالتَّالي فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{1+(1/n)} = e^{\gamma} \approx 1.78107.$$

(انظر الشكل 15،6).

---

[1] يدعى العدد γ ثابت أُولِر-مَاشُورُونِي (Euler-Mascheroni constant). للاستزادة والاطلاع أكثر، انظر https://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_constant.



شكل 15.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{1/k}}{1+(1/k)}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 1.78098337$.

التمرين 6

جد قيمة الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^n/n}$ حيث $a > 0$.

الحل: إنَّ: $\prod_{k=1}^{n} a^{(-1)^k/k} = P_n$. ومنه فإنَّ:

$$\log_a(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \log_a\left(a^{(-1)^k/k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

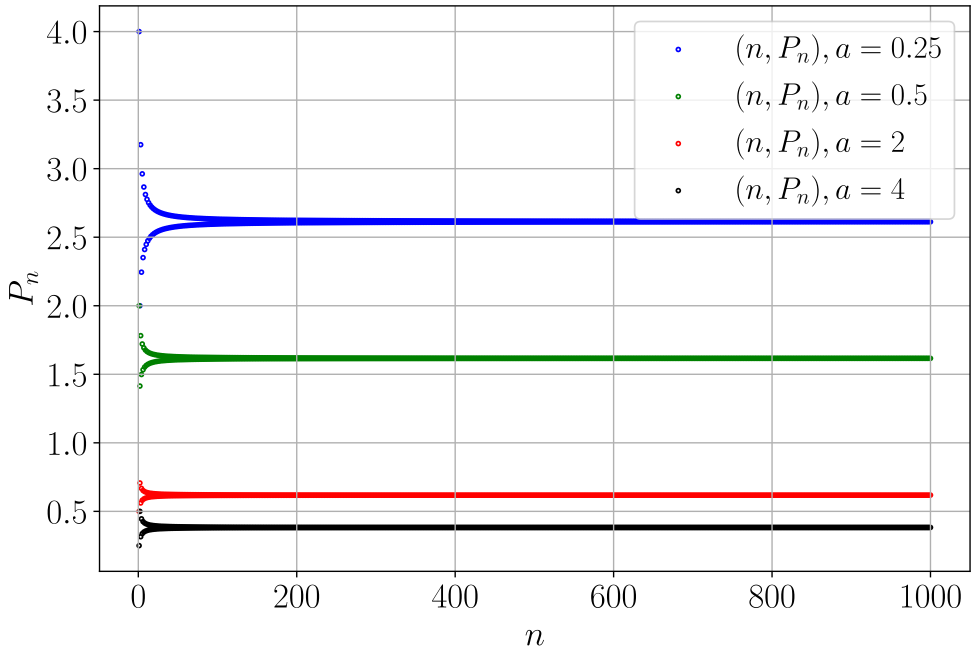
ومنه يمكن أن نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} \log_a(P_n) = \log_a\left(\lim_{n\to\infty} P_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

لكن: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$ (انظر المثال 20). وبالتَّالي فإنَّ:

$$\log_a\left(\lim_{n\to\infty} P_n\right) = -\ln(2) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = \prod_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^n/n} = a^{-\ln 2}.$$

(انظر الشكل 16.6).



شكل 16.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} a^{(-1)^k/k}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{1000} \approx 2.61388264$ من أجل $a = 0.25$، و $P_{1000} \approx 1.61675064$ من أجل $a = 0.5$، و $P_{1000} \approx 0.61852457$ من أجل $a = 2$، و $P_{1000} \approx 0.38257265$ من أجل $a = 4$.

التمرين 7

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2+1}$.

الحل: إنَّ:

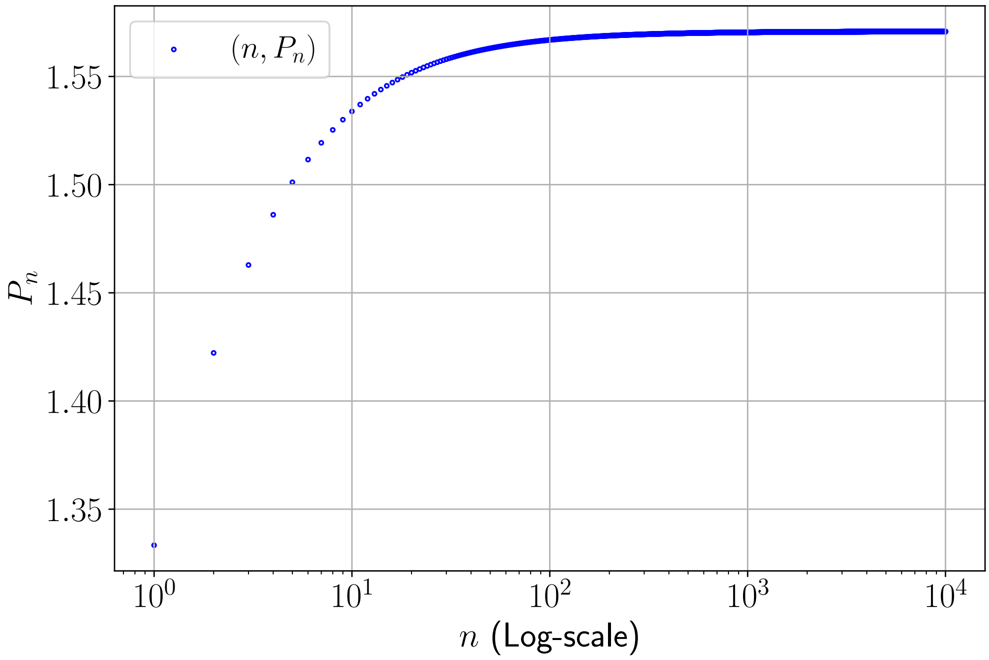
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2+1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2-1}\right).$$

كما أنَّ: $4n^2 - 1 > 0$ مهما يكن $n \geqslant 1$. وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ مُتَقارِبَة، فإنَّ الجِداء المُعطَى مُتقارِب (انظر الشكل 17.6).

يدعى الجِداء المُعطَى، جِداء والِسْ[2] (Wallis product). وهو جِداء مُتَقارِب من $\pi/2$، ومنه يمكن أن نكتب:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2+1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57079632.$$

[2] John Wallis (1703-1615) عالم انكليزي في الجبر والمنطق وعلم اللاهوت. كان لعمله تأثير في تطوير نيوتن لحساب التفاضل والتكامل وقوانين الحركة.



شكل 17.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2+1}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 1.57075705$. كما أنَّه بالحساب نجد: $P_{10^7} \approx 1.57079629$، $P_{10^9} \approx 1.57079632$.

التمرين 8

ادرس حسب قيم $a \in \mathbb{R}^*$ تَقارُب أو تَباعُد الجِداء الآتي: $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$.

الحل: إنَّ:

$$\begin{aligned}
P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) &= \cos\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^3}\right) \cdots \cos\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) \\
&= \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^3}\right) \cdots \cos\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^3}\right) \cdots \cos\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) \cdot \sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^3}\right) \cdots \cos\left(\frac{a}{2^{n-2}}\right) \cdot \sin\left(\frac{a}{2^{n-2}}\right)}{2 \cdot 2\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a}{2^3}\right) \cdots \cos\left(\frac{a}{2^{n-3}}\right) \cdot \sin\left(\frac{a}{2^{n-3}}\right)}{2 \cdot 2^2 \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \\
&= \ldots = \frac{\sin(a)}{2^n \sin(a/2^n)}.
\end{aligned}$$

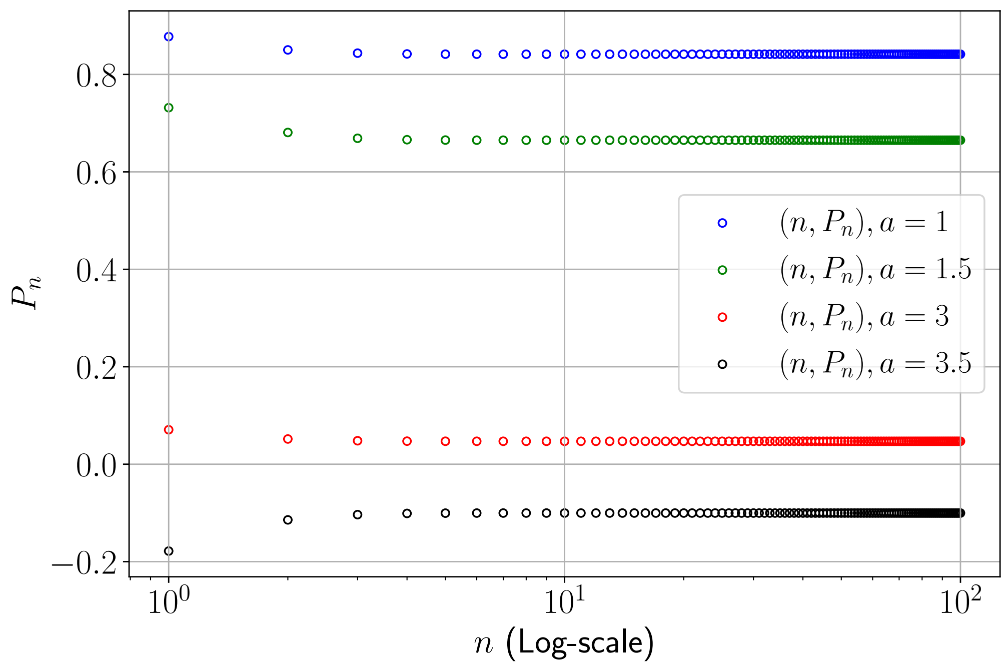
وبالتّالي فإنّ:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin a}{a} \cdot \frac{a/2^n}{\sin\left(a/2^n\right)} = \frac{\sin a}{a}.$$

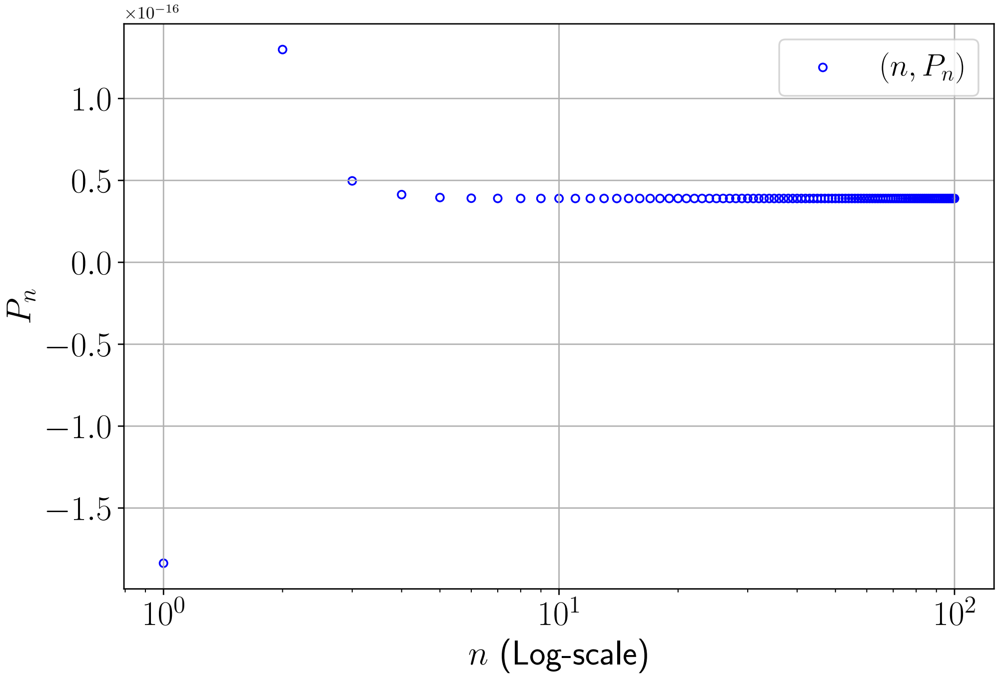
ومنه نجد أنّه إذا كانت $\sin a \neq 0$، أي: $a \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$، فإنّ الجِداء المُعطى يكون مُتقارِبًا من $\frac{\sin a}{a}$ (انظر الشكل 18.6)، ومنه يمكن أن نكتب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin a}{a}; \qquad a \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

وإذا كانت $\sin a = 0$، أي: $a = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}^*$، فإنّ الجِداء المُعطى يكون مُتباعِدًا إلى الصفر (انظر الشكل 19.6).



شكل 18.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{100} \approx 0.84147098$ من أجل $a = 1$، و $P_{100} \approx 0.66499666$ من أجل $a = 1.5$، و $P_{100} \approx 0.04704$ من أجل $a = 3$، و $P_{100} \approx -0.10022378$ من أجل $a = 3.5$.



شكل 19.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{3\pi}{2^k}\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{100} \approx 0.38 \times 10^{-16}$.

تطبيق: من أجل $a = \frac{\pi}{2}$ نجد أنَّ:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

بشكل مماثل تمامًا لما تَمَّ في التمرين 8، نجد:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sinh a}{a}; \qquad \forall a \in \mathbb{R}^*.$$

التمرين 9

ادرس حسب قيم $a \in \mathbb{R}$ تقَارُب أو تبَاعُد الجِداء الآتي: $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + a^{(2^n)}\right)$.

الحل: إنَّ:

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + a^{(2^k)}\right) = (1 + a)\left(1 + a^2\right)\left(1 + a^4\right) \cdots \left(1 + a^{2^{k-1}}\right)\left(1 + a^{2^k}\right).$$

نضرب طرفي المساواة السابقة بـ $1 - a \neq 0$، فنجد:

$$\begin{aligned}(1-a)P_n &= (1-a)(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\cdots\left(1+a^{\left(2^{n-1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(2^n\right)}\right)\\ &= \left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\cdots\left(1+a^{\left(2^{n-1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(2^n\right)}\right)\\ &= \left(1-a^4\right)\left(1+a^4\right)\left(1+a^8\right)\cdots\left(1+a^{\left(2^{n-1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(2^n\right)}\right)\\ &= \ldots = \left(1-a^{\left(2^n\right)}\right)\left(1+a^{\left(2^n\right)}\right)\\ &= \left(1+a^{\left(2^{n+1}\right)}\right).\end{aligned}$$

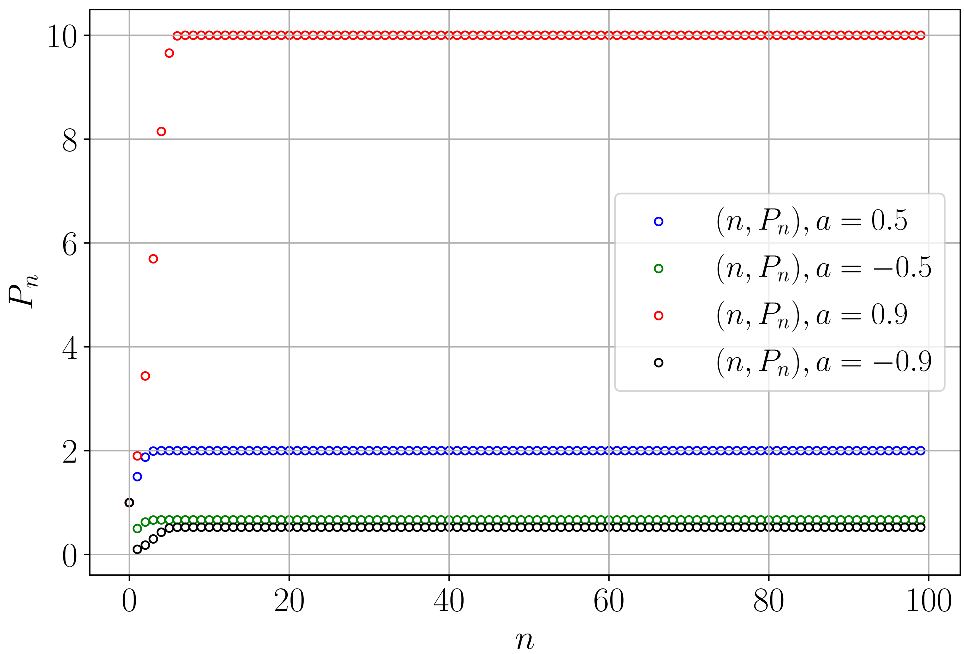
ومنه:

$$P_n = \frac{1+a^{\left(2^{n+1}\right)}}{1-a}.$$

- إذا كان $|a| < 1$، فإنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2^n)} = \infty$. ومنه فإنَّ الجِداء المُعطَى سيكون في هذه الحالة مُتقَارِبًا من $\frac{1}{1-a}$ (انظر الشكل 20.6). ونكتب:

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+a^{\left(2^n\right)}\right) = \frac{1}{1-a}; \qquad |a| < 1.$$

- إذا كان $|a| > 1$، فإنَّ الجِداء المُعطَى سيكون مُتبَاعِدًا.
- إذا كان $|a| = 1$، فإنَّ الجِداء المُعطَى يصبح مساويًا لـ $\infty = \cdots 2 \cdot 2$.



شكل 20.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{0, 1, \ldots, 99\}$ و $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+a^{\left(2^k\right)}\right)$.

في الشكل 20.6 لدينا: $P_{99}=2$ من أجل $a=0.5$، و $P_{99}\approx 0.6666$ من أجل $a=-0.5$، و $P_{99}=10$ من أجل $a=0.9$، و $P_{99}\approx 0.52631579$ من أجل $a=-0.9$.

التمرين 10

ادرس تقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

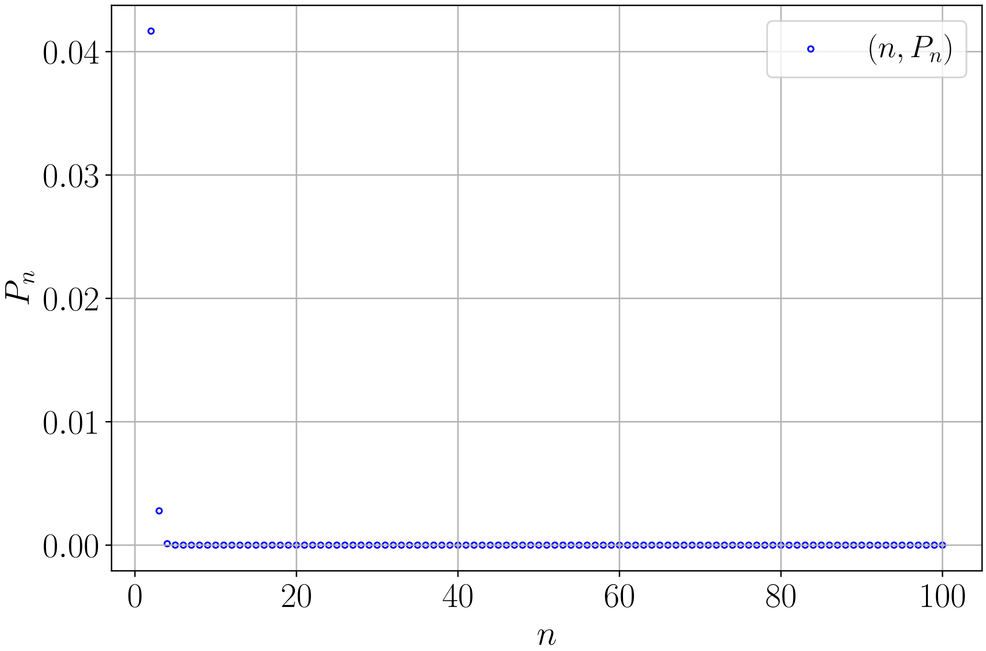
الحل: نلاحظ أولًا أنَّ: $a_n:=\frac{1}{n^2-1}\neq 0,\ \forall n\geqslant 2$، كما أنَّ:

$$\begin{aligned}
P_n &= \prod_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)(k+1)}\\
&= \frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{4\cdot 7}\cdots\frac{1}{(n-3)(n-1)}\cdot\frac{1}{(n-2)n}\cdot\frac{1}{(n-1)(n+1)}\\
&= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdots(n-2)^2(n-1)^2\cdot n\cdot(n+1)}\\
&= \frac{4}{1\cdot 2\cdot(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(n-2)(n-1))^2\cdot n\cdot(n+1)}\\
&= \frac{2}{n(n+1)\left((n-1)!\right)^2}.
\end{aligned}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)\left((n-1)!\right)^2}=0.$$

وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ مُتبَاعِد إلى الصفر. انظر الشكل 21.6.



شكل 21.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{2, 3, \dots, 100\}$ و $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{100} = 10^{-316}$. من هذا الشكل نلاحظ (بدءًا من الحد الرابع) سرعة التَّباعُد إلى الصفر.

التمرين 11

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$.

الحل: إنَّ:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right).$$

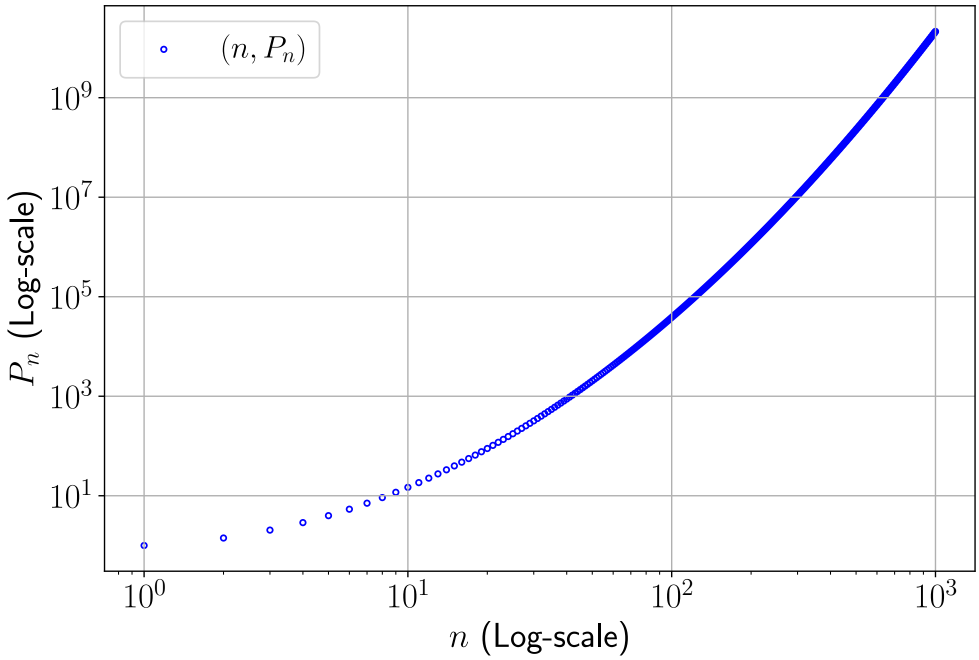
كما أنَّ: $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geqslant 0,\ \forall n \geqslant 1$. ومنه فإنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ والمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$ من طبيعة واحدة. من أجل دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$، لدينا:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

وبما أنَّ: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$، فإنَّ:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(\sqrt[n]{n}\right)}{\sqrt[n]{n} - 1} = 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \sim \ln\left(\sqrt[n]{n}\right) = \frac{\ln n}{n}; \quad n \longrightarrow \infty.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ مُتَبَاعِدَة (انظر التمرين 46)، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$ مُتَبَاعِدَة. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ مُتَبَاعِد. انظر الشكل 22.6.



شكل 22.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{1000} = 21454044879.113068$.

التمرين 12

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء: $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

الحل: إنَّ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1 - \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

كما أنَّ:

$$0 \leqslant 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant 1, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

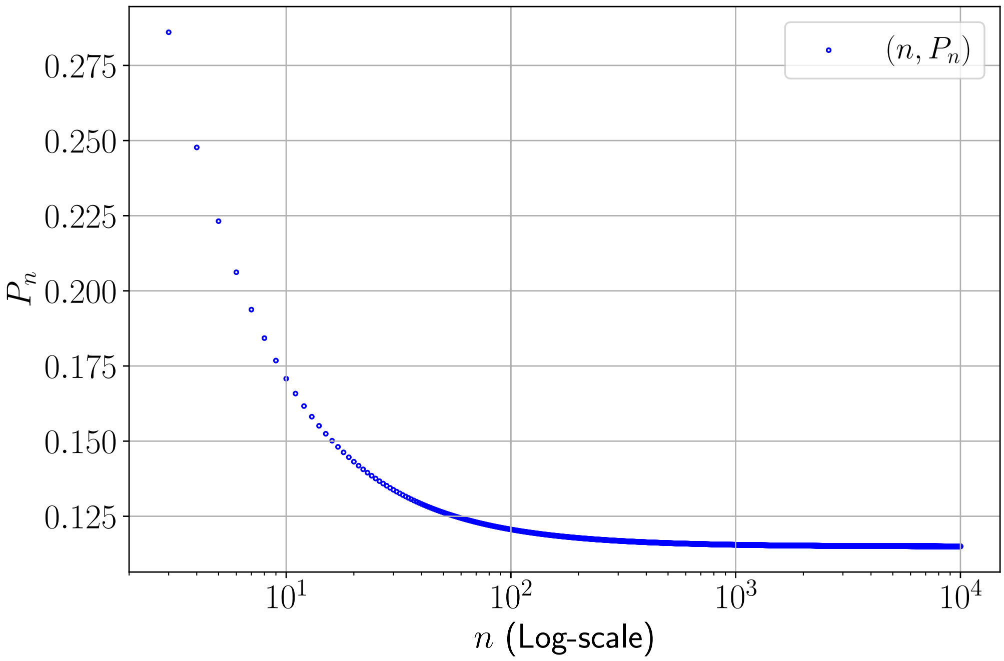
لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

بالمُقارَنة مع المُتَسَلْسِلَة المُتَقارِبَة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2(\pi/2n)}{(\pi/2n)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n}\right)^2=1.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ مُتَقارِبَة حسب اختبار المُقارَنة الثاني. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى مُتَقارِب (انظر الشكل 23.6).



شكل 23.6: النقاط (n,P_n) حيث $n\in\{3,4,\ldots,10^4\}$ و $P_n=\prod_{k=3}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4}\approx 0.11499877$. كما أنَّه بالحساب نجد: $P_{10^6}\approx 0.11494261$، $P_{10^8}\approx 0.11494205$. ومنه يُمكِنُنَا التَّخمين بأنَّ الجِداء مُتَقارِب من 0.115.

التمرين 13

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

الحل: نلاحظ أولًا أنَّ:

$$a_n:=\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}>0,\qquad \forall n\geqslant 0.$$

ومنه يمكِنُنَا دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln(a_n)$. إنَّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln(a_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right).$$

وبما أنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{n+2}=0$ فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}{\frac{-1}{n+2}}=1.$$

ومنه فالمُتَسلْسِلتَيْن $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$ و $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+2}$ من طبيعة واحدة (حسب اختبار المُقارَنة الثاني). وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+2}$ مُتَباعِدَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$ مُتَباعِدَة. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$ مُتَبَاعِد.

طريقة ثانية للحل: نلاحظ أنَّ:

$$a_n:=\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\neq 0,\qquad \forall n\geqslant 0.$$

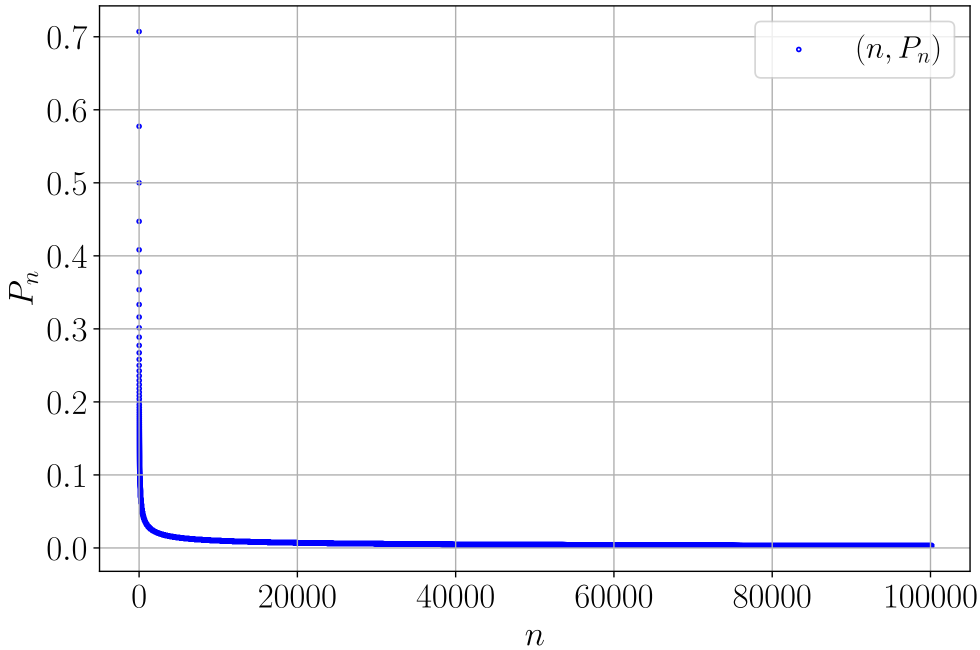
كما أنَّ:

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{k+1}{k+2}}=\sqrt{\frac{1}{\cancel{2}}}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}}\cdots\sqrt{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}}}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{n+1}}{n+2}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}=0.$$

وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى مُتبَاعِد إلى الصفر (انظر الشكل 24.6).



شكل 24.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{0, 1, \ldots, 10^4\}$ و $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}$.

في الشكل 24.6 لدينا: $P_{10^4} \approx 0.003162246$. من هذا الشكل نلاحظ أنَّ الجِداء المُعطَى يَتبَاعَد إلى الصفر بشكل بطيء جدًا. إذ إنَّه بالحساب نجد أنَّ: $P_{10^7} \approx 0.00031623$ و $P_{10^8} \approx 9.99999 \times 10^{-5}$ و $P_{10^9} \approx 3.16228 \times 10^{-5}$.

التمرين 14

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

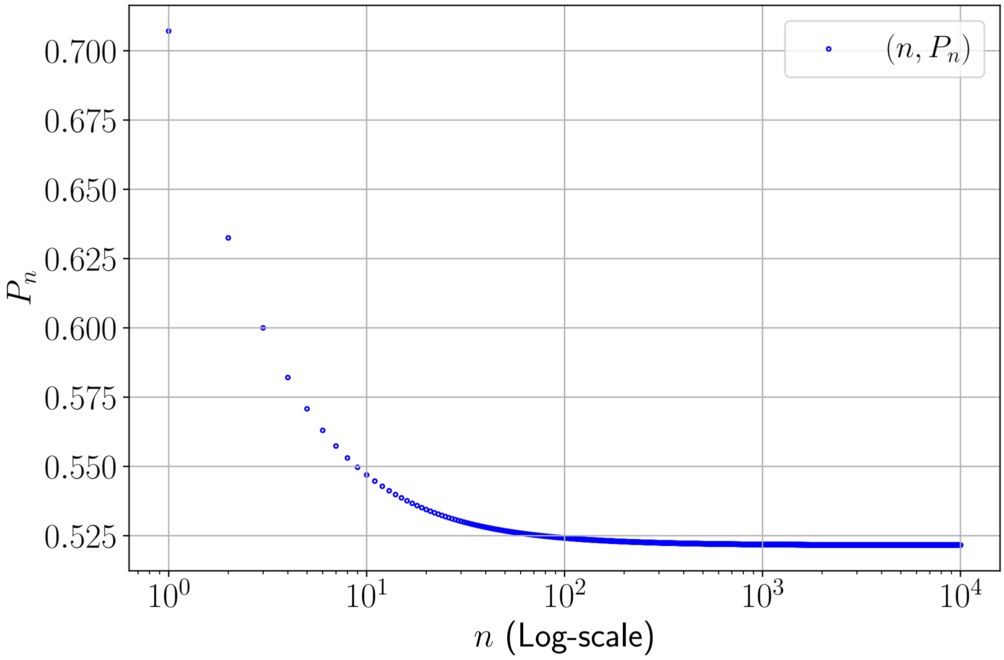
الحل: إنَّ:

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)\right] \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}\right) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \cdot n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)}\right) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)}\right).
\end{aligned}$$

لنضع الآن: $a_n := \frac{1}{n^2 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$، **نلاحظ أنَّ:** $a_n > 0,\ \forall n \geqslant 1$، **ومنه فإنَّ الجِداء** $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ والمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ من طبيعة واحدة، إنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

ومنه فإنَّ المُتَسَلسِلَتَيْن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ من طبيعة واحدة (حسب اختبار المُقارَنة الثاني). وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ مُتَقارِبَة، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة. ومنه فالجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ مُتقارِب. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ مُتقَارِب (انظر الشكل 25،6).



شكل 25.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ و $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 0.5215901244$.

التمرين 15

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

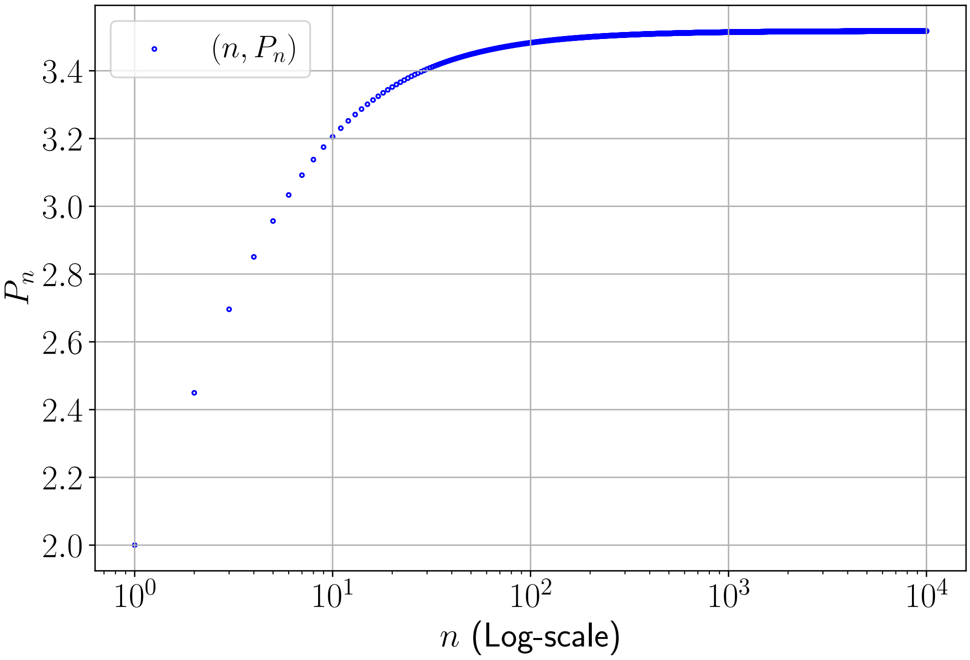
الحل: نلاحظ أولًا أنَّ: $a_n := \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} > 0, \ \forall n \geqslant 1$. ومنه يُمكِنُنا دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_n)$. إنَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. لنقارن مع المُتَسَلْسِلَةَ المُتَقارِبَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$، حسب اختبار المُقارَنة الثاني، فنجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ مُتقارِبة. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطى $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$ مُتقارِب (انظر الشكل 26.6).



شكل 26.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{1+\frac{1}{k}}$ و $n \in \{1, 2, \ldots, 10^4\}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 3.51713555$.

التمرين 16

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

الحل: نلاحظ أنَّ: $a_n := \sqrt[n^2]{n} > 0, \ \forall n \geqslant 1$. ومنه يُمكِننا دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_n)$. إنَّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\sqrt[n^2]{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

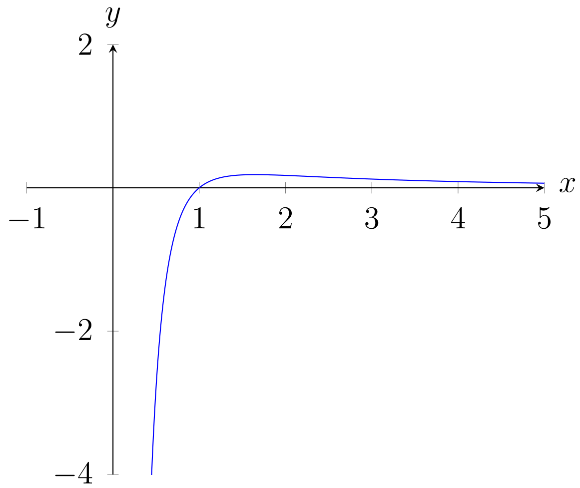
لندرس الآن طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. لنأخذ الدَّالَّة:

$$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+; \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

إنَّ f مستمرة على المجال $[1, +\infty[$، كما أنَّ:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^3} < 0; \qquad \forall x \in [2, +\infty[.$$

انظر الشكل 27.6.



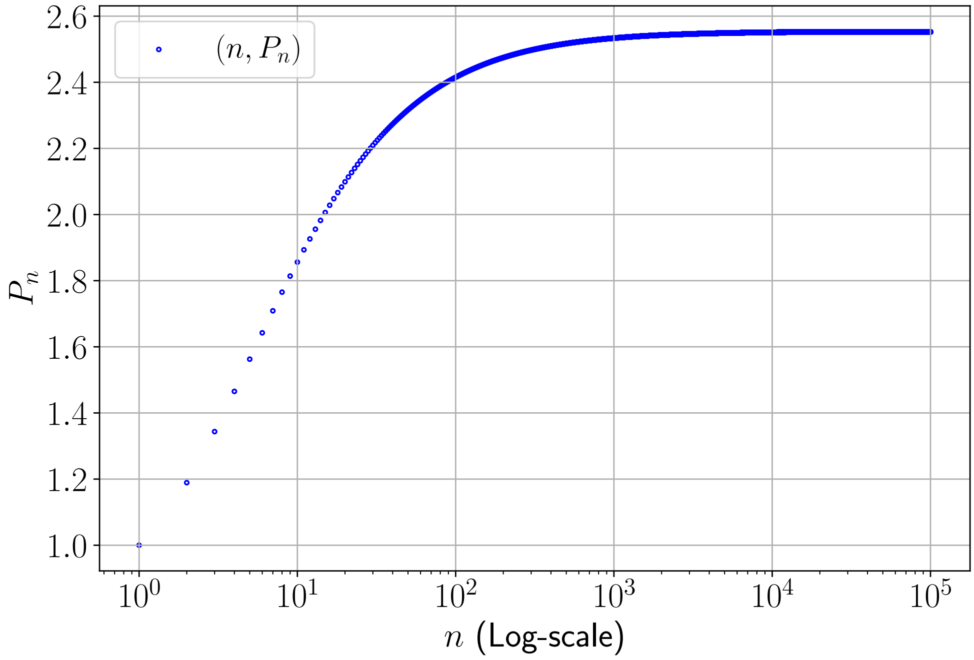
شكل 27.6: الخط البياني للدَّالَّة: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

ومنه فإنَّ شروط اختبار كُوشِي التَّكامُلِي محققة على المجال $[2, +\infty[$. كما أنَّه باستخدام قاعدة المُكامَلَة بالتَّجزئَة نجد أنَّ:

$$\int_2^\infty f(x)dx = \int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{b} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1+\ln 2}{2}.$$

ومنه فإنَّ التكامل $\int_2^\infty f(x)dx$ مُتقَارِب، وهذا يعني أنَّ المُتَسَلسِلَة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ مُتقَارِبَة. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$ مُتقَارِب (انظر الشكل 28.6).

بشكل مماثل لما سبق نجد أنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^p]{n}$ مُتقَارِب لأجل كل $p \in \{3, 4, , \ldots\}$.



شكل 28.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k^2]{k}$ و $n \in \{1, 2, \ldots, 10^5\}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^5} \approx 2.55339316$. لاحظ من الشكل التَّقارُب البطيء للجِداء المُعطَى.

التمرين 17

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$.

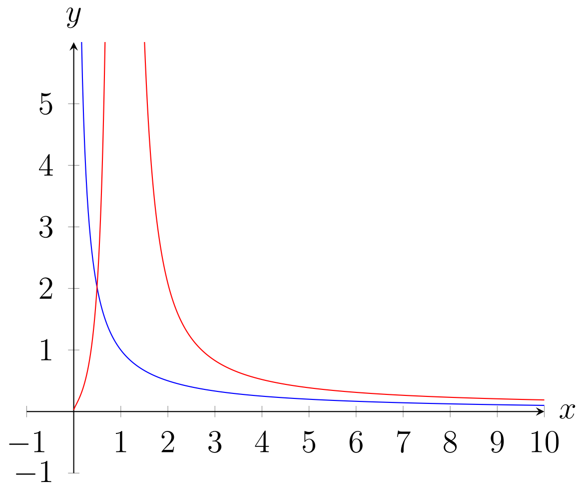
الحل: لنضع: $a_n := \frac{(-1)^n}{\ln n}$. إنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ مُتَبَاعِدَة. إذ إنَّ:

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

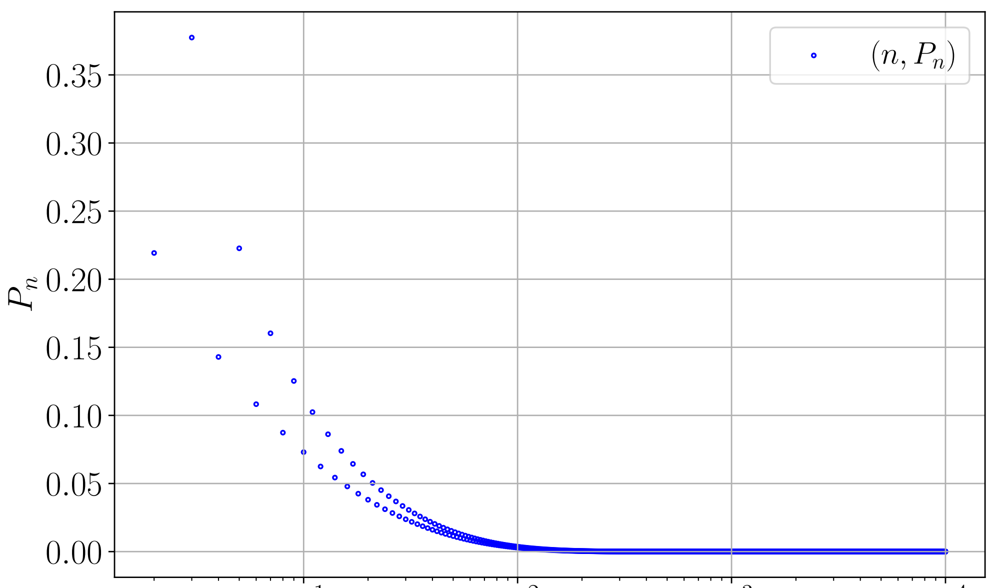
لكن المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ مُتَقارِبَة حسب اختبار لايبْنِتز، ومنه فهي مُتَقارِبَة شرطيًّا. كما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2$ مُتَباعِدَة. إذ إنَّ:

$$\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geqslant 2.$$

انظر الشكل 29.6. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$ مُتَبَاعِد إلى الصفر (انظر الشكل 30.6).



شكل 29.6: الخطُّ البياني للدالة: $f_1(x) = \frac{1}{x}$ على المجال $]0, \infty[$. وللدالة $f_2(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$ على $]0, 1[\cup]1, \infty[$.



شكل 30.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\ln k}\right)$ و $n \in \{2, 3, \ldots, 10^4\}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 10^{-36}$.

التمرين 18

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

الحل: لنضع: $a_n := \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. إنَّ: $a_n > 0, \ \forall n \geqslant 2$. ومنه يُمكِننا دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة

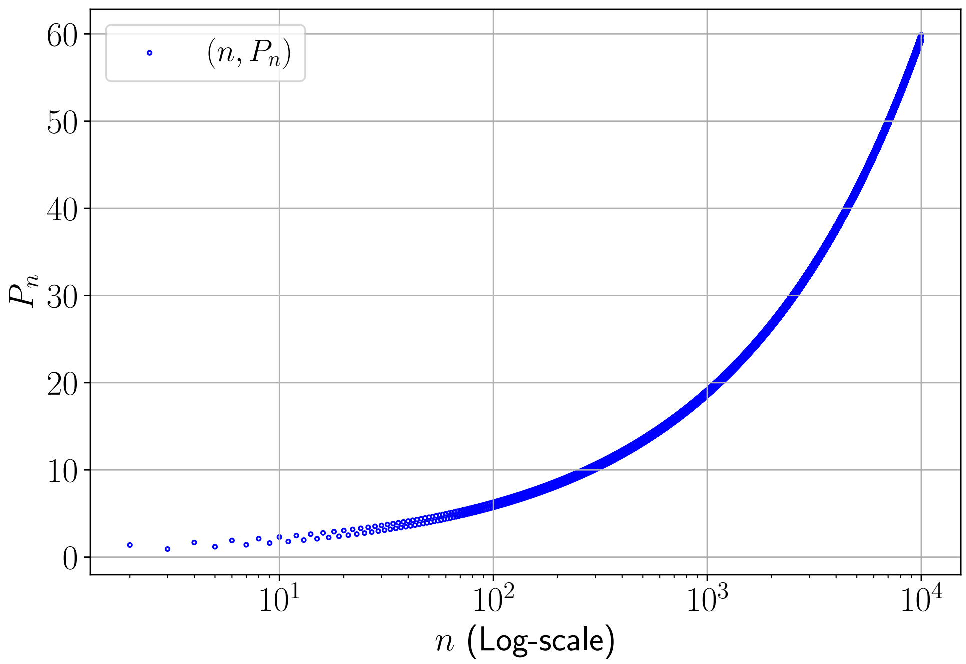
$\sum_{n=2}^{\infty} \ln(a_n)$. إنَّ: $(-1)^n = 1$ عندما يكون n زوجيًّا، و $(-1)^n = -1$ عندما يكون n فرديًّا. ومنه: $(-1)^n \leqslant 1, \ \forall n \geqslant 2$. وبالتَّالي فإنَّ:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n} + (-1)^n \leqslant 1 + \sqrt{n}, \quad \forall n \geqslant 2,\\
&\Longrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}, \quad \forall n \geqslant 2,\\
&\Longrightarrow \ln(a_n) = \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right) \geqslant \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}\right), \quad \forall n \geqslant 2,
\end{aligned}$$

وبما أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)}{\frac{-1}{1+\sqrt{n}}} = 1.$$

فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(a_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)$ مُتَبَاعِدَة حسب اختبار المُقَارَنة الثاني، إذ إنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ مُتَبَاعِدَة. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ مُتَبَاعِد (انظر الشكل 31.6).



شكل 31.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ و $n \in \{2, 3, \dots, 10^4\}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 59.2834167$.

التمرين 19

ادرس تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod_{n=2}^{\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n}}$.

الحل: لنضع: $a_n := n^{\frac{(-1)^n}{n}}$، إنَّ: $a_n > 0,\ \forall n \geqslant 2$، ومنه يُمكِننَا دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln(a_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(n^{\frac{(-1)^n}{n}}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

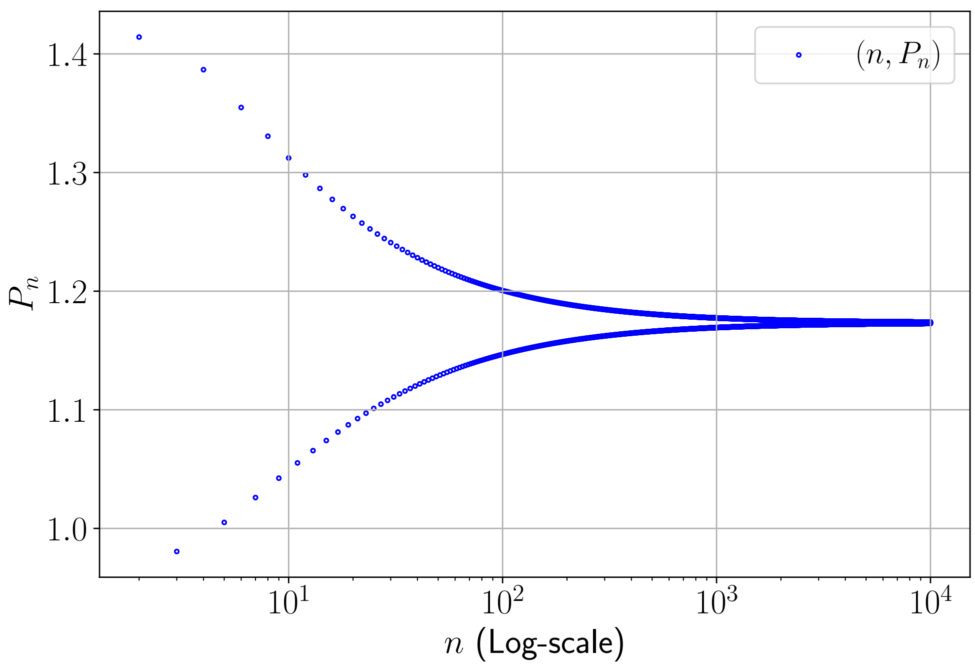
إنَّ المُتَسَلْسِلَة:

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\ln(a_n)| = \sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\ln n}{n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n},$$

مُتَباعِدَة حسب اختبار كُوشِي التَّكامُلِي، إذ إنَّ:

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_2^b = \infty.$$

إلا أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ مُتناوبة، وهي مُتَقارِبَة حسب اختبار لايبنْتز. ومنه فالمُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(a_n)$ مُتَقارِبَة شرطيًّا، وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى $\prod_{n=2}^{\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n}}$ مُتقَارِب (وتقارُبه شرطي) انظر الشكل 32.6.



شكل 32.6: النقاط (n, P_n) حيث $P_n = \prod_{k=2}^{n} k^{\frac{(-1)^k}{k}}$ و $n \in \{2, 3, \ldots, 10^4\}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{10^4} \approx 1.17389749$.

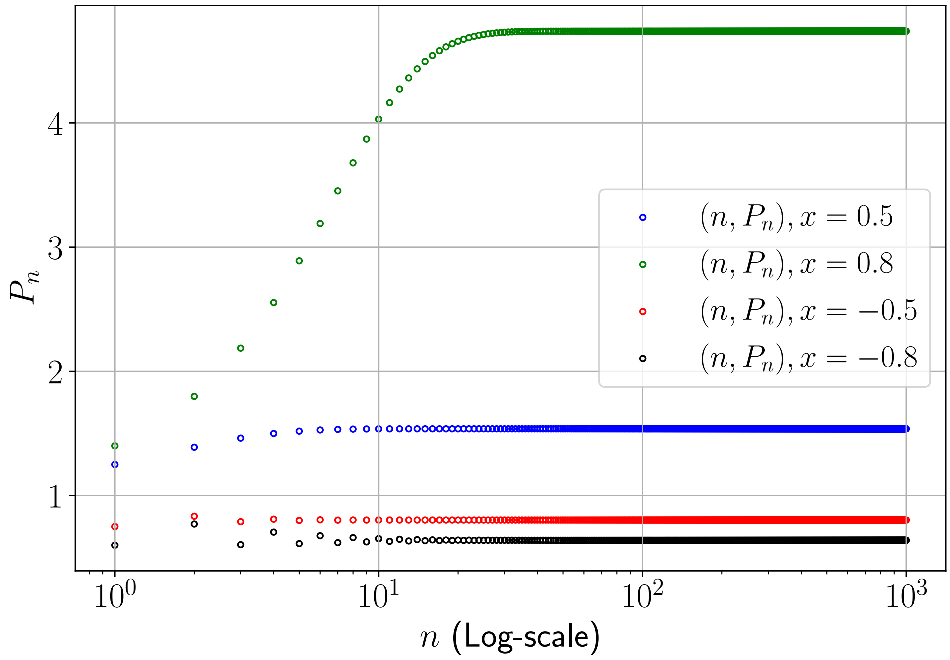
التمرين 20

ما هي قيم $x \in \mathbb{R}$ الممكنة حتى يكون الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n\right)$ مُتقارِب بِالإِطْلَاق.

الحل: لنضع: $a_n := \left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$، ومنه نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n|x|}{n+1}=|x|.$$

فإذا كان $|x|<1$ (أي $x\in]-1,1[$) فإنَّ المُتَسَلْسِلَةَ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$ تكون مُتَقَارِبَةَ بِالإِطْلَاق، حسب اختبار كُوشِي. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n\right)$ يكون مُتقَارِباً بِالإِطْلَاق عندما $x\in]-1,1[$ (انظر الشكل 33.6).



شكل 33.6: النقاط (n,P_n) حيث $n\in\{1,2,\dots,1000\}$ و $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{kx}{k+1}\right)^k\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{1000}\approx 1.53713728$ من أجل $x=0.5$، و $P_{1000}\approx 0.8027295$ من أجل $x=-0.5$، و $P_{1000}\approx 4.73883608$ من أجل $x=0.8$، و $P_{1000}\approx 0.63996034$ من أجل $x=-0.8$.

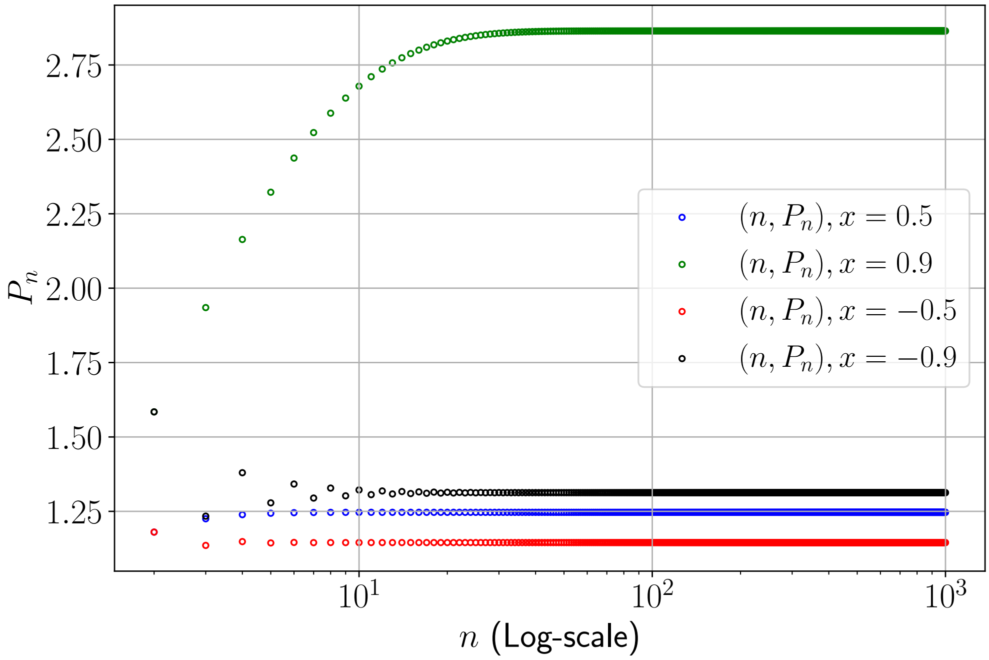
التمرين 21

ما هي قيم $x \in \mathbb{R}$ الممكنة حتى يكون الجداء $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n\ln n}\right)$ مُتقَارِب بالإِطْلَاق.

الحل: لنضع: $a_n := \frac{x^n}{n\ln n}$، ومنه نجد أنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{\ln n}}.$$

فإذا كان $|x| < 1$ (أي $x \in]-1,1[$) فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln n}$ تكون مُتقارِبَة بِالإِطْلَاق، حسب اختبار كُوشِي. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء $\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1+\frac{x^n}{n\ln n})$ يكون مُتقارِبًا بِالإِطْلَاق عندما $x \in]-1,1[$ (انظر الشكل 34،6).



شكل 34،6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{2,3,\ldots,1000\}$ و $P_n = \prod\limits_{k=2}^{n}\left(1+\frac{x^k}{k\ln k}\right)$. في هذا الشكل لدينا: $P_{1000} \approx 1.24675469$ من أجل $x = 0.5$، و $P_{1000} \approx 1.14510536$ من أجل $x = -0.5$، و $P_{1000} \approx 2.86425326$ من أجل $x = 0.9$، و $P_{1000} \approx 1.31287495$ من أجل $x = -0.9$.

التمرين 22

ادرس، حسب قيم $x \in \mathbb{R}$ تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^x$.

الحل: نلاحظ أولًا أنَّ:

$$a_n := \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^x > 0, \quad \forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

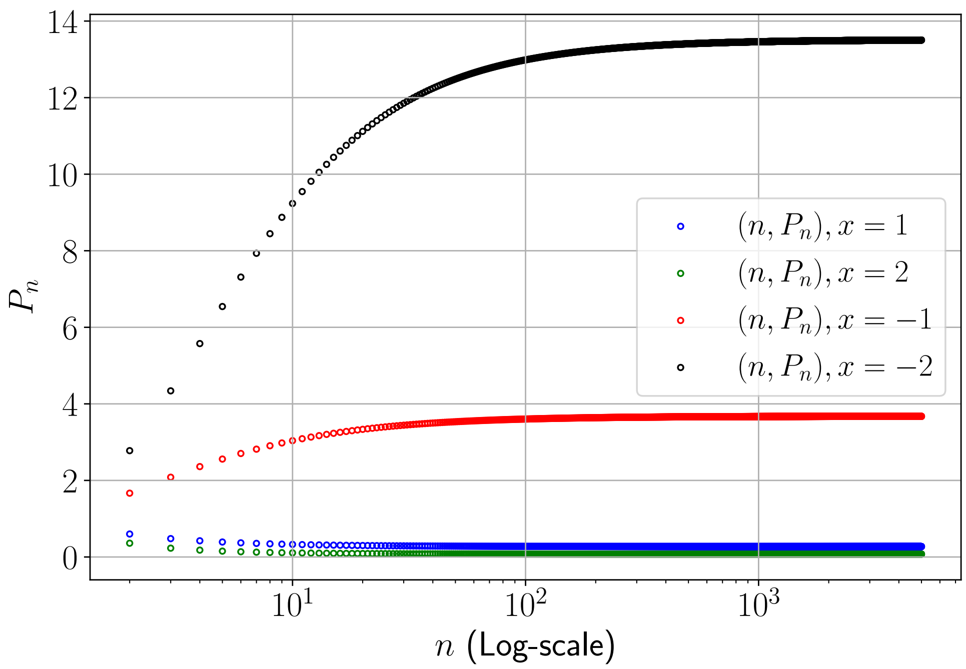
ومنه يُمكِننا دراسة طبيعة المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(a_n)$. إنَّ:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln(a_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^x\right] = x\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right).$$

وبما أنَّ: $\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{n^2+1} = 0$ فإنَّ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)}{\frac{-2}{n^2+1}} = 1.$$

ومنه فالمُتَسَلْسِلَتَيْن $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$ و $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n^2+1}$ من طبيعة واحدة (حسب اختبار المُقارَنة الثاني). وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n^2+1}$ مُتَقارِبَة (بالمُقارَنة مع مُتَسَلْسِلَة رِيمَان المُتَقارِبَة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$ (مهما تكن $x \in \mathbb{R}$) مُتَقارِبَة. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء المُعطَى $\prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^x$ مُتقارِب مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ (انظر الشكل 35.6).



شكل 35.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{2, 3, \ldots, 5000\}$ و $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^x$. في هذا الشكل لدينا: $P_{5000} \approx 0.27213788$ من أجل $x = 1$، و $P_{5000} \approx 0.07405902$ من أجل $x = 2$، و $P_{5000} \approx 3.67460792$ من أجل $x = -1$، و $P_{5000} \approx 13.50274337$ من أجل $x = -2$.

التمرين 23

ادرس حسب قيم x تَقارُب أو تَباعُد الجِداء $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}$.

الحل: لنضع: $a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}$، إنَّ:

- $a_n > 0$ مهما يكن $x \in]-1,\infty[$ و $n \geqslant 1$،
- إذا كان $x = -k$، حيث $k \in \mathbb{N}$، أي إذا كان: $x = -1, -2, -3, \ldots$، فإنَّ: $a_k = 0$ و $a_m < 0$ من أجل كل $1 \leqslant m < k$ و $a_m > 0$ من أجل كل $m \geqslant k$. مثلاً من أجل $x = -3$، نجد أنَّ: $a_3 = 0$ و $a_1 < 0, a_2 < 0$ و $a_4 > 0, a_5 > 0, \ldots$،
- وإذا كان $x \in]-\infty,-1[\backslash\{-2,-3,-4,\ldots\}$. فإنَّ: $a_n < 0$ لأجل كل $n < |x|$ و $a_n > 0$ لأجل كل $n > |x|$. مثلاً من أجل $x = -3.2$، نجد $|x| = 3$ و $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$ و $a_m > 0, \forall m \geqslant 4$،

وبالتَّالي فإنَّه مهما يكن $x \in \mathbb{R}$ فإنَّه يوجد عدد طبيعي m بحيث: $a_n > 0, \forall n \geqslant m$، أي بدءًا من الحد الذي ترتيبه m تصبح جميع حدود الجِداء أعداد موجبة، والحدود $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ أحدها معدوم (وهذا يحصل عندما يكون $x \in \{-1,-2,\ldots\}$) والباقي أعداد سالبة. وبالتَّالي فإنَّه يمكن حذف الحدود $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$، ودراسة الجِداء الآتي:

$$\prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}.$$

والذي جميع حدوده أعداد موجبة. من أجل ذلك، لندرس طبيعة المُتَسَلْسِلَة:

$$\sum_{n=m}^{\infty}\ln a_n = \sum_{n=m}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right)$$

إنَّ:

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}; \quad n \longrightarrow \infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ومنه:

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n} \sim -\frac{x^2}{2n^2}; \quad n \longrightarrow \infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=m}^{\infty}\frac{x^2}{n^2}$ مُتَقارِبَة مهما يكن $x \in \mathbb{R}$. فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=m}^{\infty}\ln a_n$ مُتَقارِبَة مهما يكن $x \in \mathbb{R}$. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء

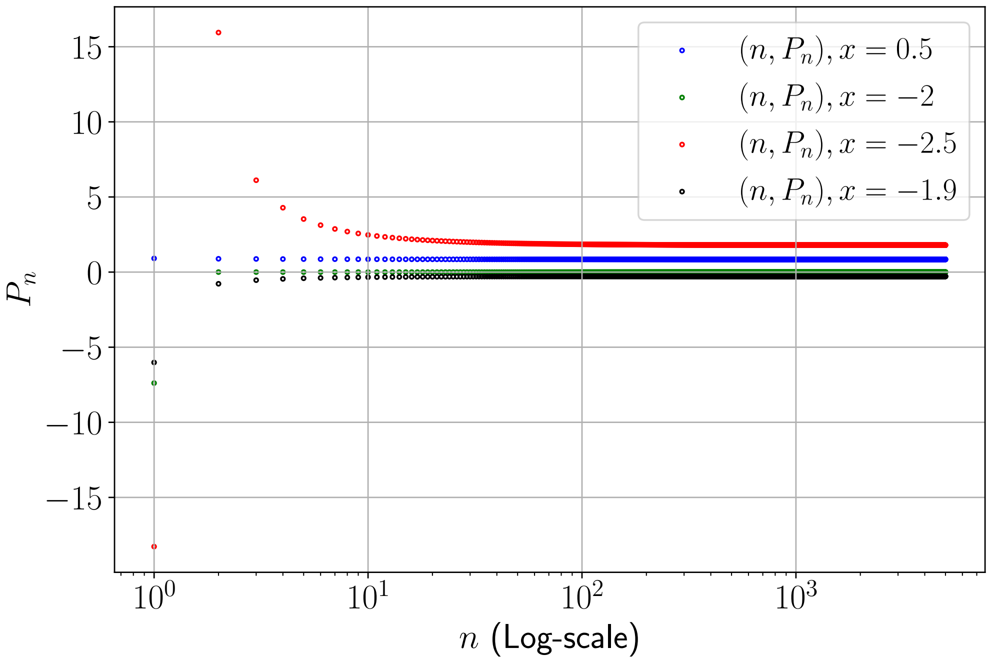
$$\prod_{n=m}^{\infty}a_n = \sum_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}$$

مُتقَارِب مهما يكن $x \in \mathbb{R}$. وبما أنَّ حذف عدد منته من حدود الجِداء لايؤثر على طبيعته، فإنَّ الجِداء المُعطَى مُتقَارِب مهما يكن $x \in \mathbb{R}$ (انظر الشكل 36.6). فإذا كان:

1. $x \in]-1, \infty[$ فإنَّ $\prod_{n=1}^{\infty} a_n > 0$.

2. $x \in \{-1, -2, -3, \dots\}$ فإنَّ $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

3. $x \in]-\infty, -1[\setminus \{-k;\ k \in \mathbb{N}\}$ فإنَّ $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}^*$.



شكل 36.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 5000\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{x}{k}) \cdot e^{-\frac{x}{k}}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{5000} \approx 0.84552242$ من أجل $x = 0.5$، و $P_{5000} \approx -0.28336983$ من أجل $x = -1.9$، و $P_{5000} = 0$ من أجل $x = -2$، و $P_{5000} \approx 1.79251057$ من أجل $x = -2.5$.

التمرين 24

ادرس حسب قيم x تقَارُب أو تبَاعُد الجِداء $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \cdot e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}}$.

الحل: لنضع: $a_n := \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \cdot e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}}$، إنَّ:

- $a_n > 0$ مهما يكن $x \in]-\infty, 1[$ و $n \geqslant 1$.

• إذا كان $x = k \in \mathbb{N}$، أي إذا كان $x = 1, 2, 3, \ldots$، فإنَّ: $a_{k^2} = 0$ و $a_m < 0$ من أجل كل $1 \leqslant m \leqslant k^2 - 1$ و $a_m > 0$ من أجل كل $m \geqslant k^2 + 1$. مثلاً من أجل $x = 1$، نجد أنَّ: $a_1 = 0$. ومن أجل $x = 2$ نجد أنَّ: $a_4 = 0$ و $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$ و $a_5 > 0, a_6 > 0, \ldots$.

• وإذا كان $x \in]1, \infty[\setminus\{k \in \mathbb{N}; k \geqslant 2\}$، فإنَّ: $a_n < 0$ لأجل كل $n < x^2$ و $a_n > 0$ لأجل كل $n > x^2$. مثلاً من أجل $x = 1.2$، نجد أنَّ: $x^2 = 1.44$. ومنه يكون: $a_1 < 0$ و $a_m > 0, \forall m \geqslant 2$. ومن أجل $x = 1.9$، نجد أنَّ: $x^2 = 3.61$. ومنه يكون: $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$ و $a_m > 0, \forall m \geqslant 4$.

وبالتَّالي فإنَّه مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ فإنَّه يوجد عدد طبيعي m بحيث: $a_n > 0, \forall n \geqslant m$. أي بدءًا من الحد الذي ترتيبه m تصبح جميع حدود الجِداء موجبة لأجل كل $x \in \mathbb{R}$، والحدود $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ أحدها معدوم (وهذا يحصل عندما يكون $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$) والباقي أعداد سالبة. وبالتَّالي فإنَّه يمكن حذف الحدود $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$، ودراسة الجِداء الآتي:

$$\prod_{n=m}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \cdot e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}}.$$

والذي جميع حدوده أعداد موجبة. من أجل ذلك لندرس طبيعة المُتَسَلْسِلَة:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \ln a_n = \sum_{n=m}^{\infty}\left(\ln\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right).$$

إنَّ:

$$\ln\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{2n} - \frac{x^3}{3n^{3/2}}; \quad n \longrightarrow \infty,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

ومنه:

$$\ln\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n} \sim -\frac{x^3}{3n^{3/2}}; \quad n \longrightarrow \infty,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

وبما أنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \frac{x^3}{n^{3/2}}$ مُتَقارِبَة مهما يكن $x \in \mathbb{R}$، فإنَّ المُتَسَلْسِلَة $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \ln a_n$ مُتَقارِبَة مهما يكن $x \in \mathbb{R}$. وبالتَّالي فإنَّ الجِداء

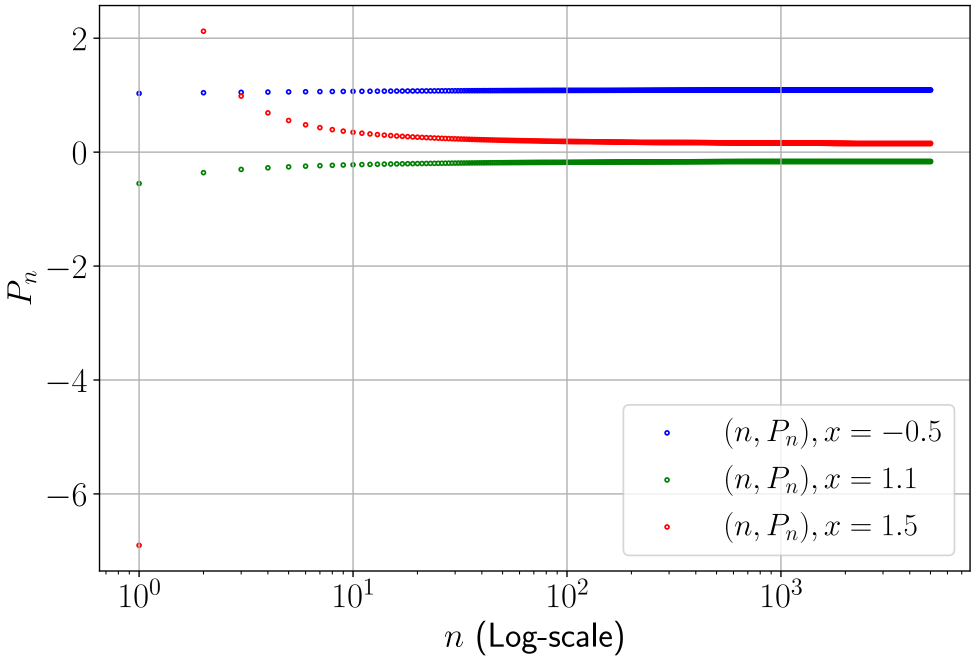
$$\prod_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \cdot e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}}$$

مُتَقارِب مهما يكن $x \in \mathbb{R}$. وبما أنَّ حذف عدد منته من حدود الجِداء لايؤثر على طبيعته، فإنَّ الجِداء المُعطَى مُتَقارِب مهما يكن $x \in \mathbb{R}$ (انظر الشكل 37.6 والشكل 38.6). فإذا كان:

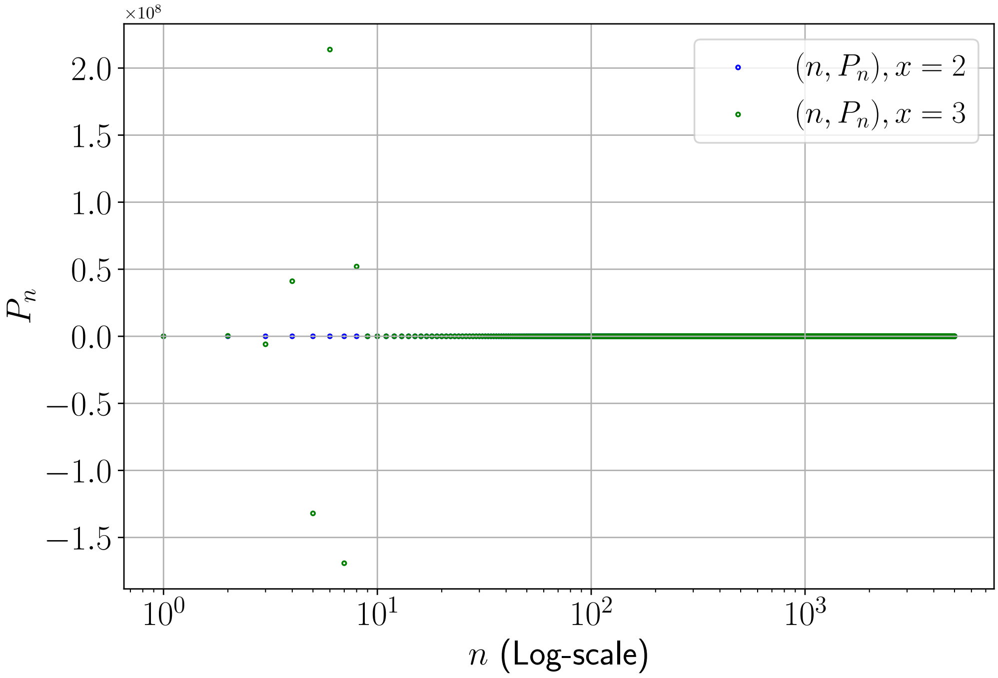
1. $x \in]-\infty, 1[$ فإنَّ $\prod_{n=1}^{\infty} a_n > 0$.

2. $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ فإنَّ $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

3. $x \in]1, \infty[\setminus \{k \in \mathbb{N};\ n \geqslant 2\}$ فإنَّ $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}^*$.



شكل 37.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \ldots, 5000\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{k}}\right) \cdot e^{\frac{x}{\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2k}}$. في هذا الشكل لدينا: $P_{5000} \approx 1.09211201$ من أجل $x = -0.5$، و $P_{5000} \approx -0.16368136$ من أجل $x = 1.1$، و $P_{5000} \approx 0.15287081$ من أجل $x = 1.5$.



شكل 38.6: النقاط (n, P_n) حيث $n \in \{1, 2, \dots, 5000\}$ و $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{k}}\right) \cdot e^{\frac{x}{\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2k}}$ من أجل $x = 2, 3$.

الفصل 7

ملحق

1.7 ثابت لِيُوڤِيْلْ والأعداد المُتَسَامِيَة

ندعوا عددًا مُتَسَامِيًا (transcendental number) كل عدد غير عادي (أو غير كسري أو غير مُنَطَّق (irrational number)) لا يُمَثِّل جذرًا لأي معادلة حُدودِيَّة (جَبْرِيَّة) غير صفريَّة مُعامِلاتُها أعداد عاديَّة. إذ إنَّ كل عدد يُمَثِّلُ جذرًا لمعادلة حُدودِيَّة مُعامِلاتُها أعداد عاديَّة هو عدد جَبْرِي (algebraic number). فمثلًا العدد $\sqrt{2}$ هو عدد جَبْرِي غير مُتَسَامٍ، لأنه يُمَثِّل جذرًا للمعادلة $x^2 - 2 = 0$. وكذلك النسبة الذَّهبيَّة $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ هي عدد جَبْرِي غير مُتَسَامٍ، إذ إنَّها تُمَثِّلُ جذرًا للمعادلة $x^2 - x - 1 = 0$.

تُعدُّ مسألة إثبات أن عدد ما هو عدد مُتَسَامٍ أم لا مسألة صعبة للغاية. وهي مسألة قديمة إلا أن مجال البحث فيها لا يزال مفتوحًا حتى الآن وبشكل كبير لأهميَّته في فروع مختلفة في الرياضيات من أهمِّها نظرية الأعداد. وكان العالم الفرنسي لِيوڤِيل[1] أوَّلُ من قدَّم إثباتًا لتَسامِي عدد حقيقي معيَّن، سُمِّيَ فيما بعد بثابت لِيُوڤِيْلْ (Liouville constant). وبذلك يكون لِيُوڤِيْلْ أوَّل من أثبت وجود الأعداد

[1] جوزيف لِيُوڤِيْلْ (Joseph Liouville ((1882-1809)). عالم رياضيات فرنسي. اشتُهِرَ بصفته رئيس تحرير مجلة Journal de Mathématiques Pures et Appliquées عام 1936، والتي نشر فيها، عام 1846، مخطوطات خلَّفها غالوا تتعلق بالمعادلات الحُدودِيَّة. عمل لِيُوڤِيْلْ في العديد من فروع الرياضيات، فعمل في نظرية الأعداد والتحليل العُقَدِي والهندسة التَّفاضُليَّة والتُّبولوجيا.

المُتَسامِيَة، وكان ذلك عام 1844[2]. يمكن تمثيل ثابت لِيوفِيْلْ بالمُتَسلسِلَة الآتية:

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n!}.$$

نلاحظ في البداية أنَّ هذه المُتَسَلْسِلَة مُتقَارِبَة. إذ إنَّ:

$$10^{n!}\geqslant 10^{n},\quad \forall n\geqslant 1 \Longrightarrow \frac{1}{10^{n!}}\leqslant\frac{1}{10^{n}},\quad \forall n\geqslant 1.$$

وبما أن المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$ مُتقَارِبَة (هندسيَّة أساسها أصغر من الواحد) فإن المُتَسَلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n!}$ مُتقَارِبَة حسب اختبار المُقَارَنَة الأول. كما أنَّ:

$$\begin{aligned}L&=\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n!}=10^{-1}+10^{-2}+10^{-6}+10^{-24}+10^{-120}+10^{-720}+\dots\\&=0.1100\,0100\,0000\,0000\,0000\,0001\,0000\,0000\dots\end{aligned}$$

حيث أن المرتبة العشريَّة التي ترتيبها $n!$ $(n\geqslant 1)$ تساوي الواحد، وباقي المراتب العشريَّة تساوي الصفر. قدَّم لِيوفِيْلْ في مقالته المنشورة عام 1844 بناءً لمجموعة غير مُنتَهِيَة من الأعداد المُتَسامِيَة باستخدام الكسور المستمرة (continued fractions) سُميت أعداد لِيُوفِيْلْ. وتَلَتْ من بعده العديد من الإسهامات في هذا المجال. ففي عام 1873 أثبت هِرْمِيتْ[3] أنَّ العدد النِّيبِّرِي[4] $e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\approx 2.71828\dots$ هو عدد مُتسَامِي. وفي عام 1882 أثبت لِينْدمَان[5] أن العدد $\pi=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\approx 3.14159\dots$ هو عدد مُتَسَامِي. إذ أثبت في البداية أنَّ العدد e^a يكون مُتسَامِياً إذا كان a عدد جَبْرِي مغاير للصفر. ومنه بناء على ذلك، بما أنَّ $e^{i\pi}=-1$ عدد جَبْرِي، فإنَّ $i\pi$ يجب أن يكون مُتسَامِياً. إلا أنَّ العدد التَّخيُّلِي

---

[2] نشر لِيوفِيْلْ نتائجه في المقالة:

Liouville, J. "Mémoires et communications des Membres et des correspondants de l'Académie." C. R. Acad. Sci. Paris 18, ,885-883 1844.

[3] شَارْلْ هِرْمِيتْ (Charles Hermite ((1901-1822)). عالم رياضيات فرنسي. اشتُهِرَ بإسهاماته في عدة حقول في الرياضيات مثل: نظريَّة الأعداد والجبر والدَّوال النَّاقصيَّة والحُدودِيَّات المُتعَامِدَة.

[4] نسبة للعالم الاسكتلندي جُونْ نِيبَر (John Napier ((1617-1550)). ويسمَّى العدد e أيضًا عدد أُويْلَر (Euler's number).

[5] فِرْدِينَانْد ڤون لِينْدمَان (Ferdinand von Lindemann ((1901-1822)). عالم رياضيات ألماني اشتُهِرَ بإثباته أنَّ العدد π هو عدد مُتسَامِي. نشر عدة براهين لمبرهنة فيرما الأخيرة تَبيَّنَ خطؤها فيما بعد.

i هو عدد جَبْرِي (إذ إنَّه أحد جذور المعادلة $x^2+1=0$). وبالتالي فإنَّه يجب أن يكون العدد π مُتسَامِيًا. وفي عام 1839 قدَّم هِلْبِرْت[6] في مقالة له نُشِرَت في عام 1893[7] إثباتًا يُبيِّنُ فيه أنَّ العَدَدَيْن e و π مُتسَامِيَان. وحديثًا، في 31.01.2023، ظهر في https://arxiv.org بحث (قيد النشر)[8] فيه إثبات آخر جديد بأنَّ العدد e مُتسَامِي.

إنَّ مجموعة الأعداد المُتسَامِيَة غير مُنتَهِيَة وغير قابلة للعد. إلا أنَّ القليل من صفوف هذه الأعداد معروف في وقتنا الحاضر، نظرًا للصعوبة البالغة التي يَتِمُّ مواجهتها لدى إثبات فيما إذا كان عدد ما مُتسَامٍ أم لا. مما يجعل باب البحث في هذا المجال وفي العديد من المسائل المفتوحة ذات الصلة مفتوحًا حتى وقتنا الحاضر، وبشكل نشط ومتنامي. فهناك العديد من الأعداد لم يتم التَّمكُّن حتى الآن من تحديد فيما إذا كانت مُتسَامِيَة أم جَبْرِية. نذكر منها على سبيل المثال:

(1) الأعداد

$$e\pi,\ e+\pi,\ \pi-e,\ \frac{\pi}{e},\ \pi^{\pi},\ e^{e},\ \pi^{e},\ \pi^{\sqrt{2}},\ e^{\pi^2},\ \ldots$$

ومعظم الأعداد الناتجة من جمع أو ضرب أو قسمة أو قوة العَدَدَيْن e و π. فليس من المعلوم حتى الآن فيما إذا كانت هذه الأعداد عاديَّة أو جَبْرِية أو مُتسَامِيَة. باستثناء الأعداد التي لها الشكل $e^{n\sqrt{\pi}}$ حيث n عدد صحيح موجب، والتي أُثبِتَ أنَّها مُتسَامِيَة[9].

---

[6] ديفيد هِلْبِرْت (David Hilbert ((1943-1862)). عالم رياضيات ألماني. اشتُهِر بعمله في أسس الهندسة، والرياضيات بوجه عام. قدَّم في المؤتمر الدُّولي للرياضيات في باريس عام 1900 ثلاث وعشرين مسألة، اشتُهِرت بمسائل هِلْبِرْت (Hilbert's problems) كان لها أثر كبير في تطوُّر مسيرة الرياضيات في القَرنِ العِشرِيْن.

[7] انظر

D. Hilbert, Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π, Mathematische Annalen Vol. 43 (3-2) (1893), 219–216

[8] انظر

Martin Klazar: A chapter in Countable Number Theory: the transcendence of Euler's number. arXiv:2301.08142. https://arxiv.org/pdf/2301.08142v1.pdf

[9] انظر

Nesterenko, Yu. V. A Course on Algebraic Independence: Lectures at IHP 1999. Unpublished manuscript. 1999.

(2) ثابت آبِيرِي[10] (Apéry constant)، وهو العدد الذي يمكن تمثيله بالمُتَسَلسِلَة الآتية:

$$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{n^3}\right)\approx 1.2020\,5690\,3159\,5942\ \ldots$$

حيث:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{1^s}+\frac{1}{1^s}+\ldots;\qquad z\in\mathbb{C},\,\mathrm{Re}(s)>1.$$

هي دالة زِيتًّا لِرِيْمَانْ (Riemann zeta function)، ومن غير المعروف حتى الآن فيما إذا كان ثابت آبِيرِي عدد جبْرِي أم مُتسَامِي.

(3) ثابت كَاتَالاَنْ[11] (Catalan's constant)، وهو العدد الذي يمكن تمثيله بالمُتَسَلسِلَة الآتية:

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots\approx 0.9159\,6559\,4177\,2190\,15054\ \ldots$$

ومن غير المعروف حتى الآن فيما إذا كان هذا العدد عادي أو غير عادي (جَبْرِي أم مُتسَامِي).

(4) ثابت خِينْتشِن[12] (Khinchin's constant)، وهو العدد الذي يمكن تمثيله بالجداء الآتي:

$$K_0=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{\log_2 n}\approx 2.6854\,5200\,1010\,6530\,6445\ \ldots$$

ومن غير المعروف حتى الآن فيما إذا كان هذا العدد عادي أو غير عادي (جَبْرِي أم مُتسَامِي).

(5) الأعداد $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ من أجل: $k=5,7,9,\ldots$، حيث:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{1^s}+\frac{1}{1^s}+\ldots;\qquad z\in\mathbb{C},\,\mathrm{Re}(s)>1.$$

هي دالّة زِيتًّا لِرِيْمَانْ (Riemann zeta function)، فمن غير المعروف حتى الآن فيما إذا كان هذه الأعداد عادية أو غير عادية (جَبْرِية أم مُتسَامِيَة).

---

[10] رُوجِيْر آبِيرِي (Roger Apéry ((1994-1916))، عالم رياضيات فرنسي، اشتُهِر بإثباته أن العدد $\zeta(3)$ غير عادي.

[11] يِفْغِيْنِي شَارْلْزْ كَاتَالاَنْ (Eugène Charles Catalan ((1894-1814))، عالم رياضيات فرنسي وبلجيكي، عمل في موضوع الكسور المستمرة والهندسة الوَصفيَّة ونظريَّة الأعداد والعديد من الفروع الأخرى للرياضيات.

[12] أليكساندر خينتشن (Aleksandr Khinchin ((1959-1894))، عالم رياضيات روسي، يعد أحد أكثر المُؤثرين والمساهمين في المدرسة الروسيَّة (السوفيْتيَّة) في نظرية الاحتمالات، ونشر العديد من الأبحاث القَيِّمَة في الفيزياء الإحصائيَّة ونظريَّة المعلومات والتَّحليل الرياضي.

ويمكن للاستزادة والاطلاع أكثر على موضوع الأعداد المُتَسَامِيَة وصلته بالمُتَسَلسِلات والجداءات غير المُنتَهِيَة والعديد من المفاهيم الأخرى العودة للمراجع الآتية والمراجع الواردة فيها.

[1] M. Ram Murty, Purusottam Rath: *Transcendental Numbers.* Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2014.

[2] Fedoua Sghiouer, Kacem Belhroukia, Ali Kacha: *Transcendence of some infinite series.* Preprint 2023. https://arxiv.org/pdf/2301.06495.pdf

[3] A. Baker: *Transcendental Number Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, UK 1975

[4] M. J. Knight: *An "Oceans of Zeros" Proof That a Certain Non- Liouville Number is Transcendental.* The American Mathematical Monthly, 98:10, .949-947 https://doi.org/10.12000817.1991.1080/00029890

المصادر

[1] خضر الأحمد: التحليل (3). مطبعة خالد بن الوليد-دمشق. 1982.

[2] عبد الغني الطنطاوي: مبادئ التحليل الرياضي 2. مطبعة جامعة دمشق. 1963.

[3] عبد الواحد أبو حمدة: التحليل (3). جامعة دمشق، دمشق. 2013.

[4] عبد الله زريق فرحات، وليد عبد الحق: الرياضيات للمهندسين، السلاسل والنشر. المطبعة الجديدة، دمشق. 1982.

[5] موفق دعبول، خضر الأحمد، محمد بشير قابيل، مروان البواب: معجم مصطلحات الرياضيات. إعداد لجنة مصطلحات الرياضيات في مجمع اللغة العربية في دمشق. 2018.

[6] Daniel D. Bonar and Michael Khoury Jr.: *Real Infinite Series.* The Mathematical Association of America, (2006).

[7] Robert Wrede and Murray R. Spiegel: *Theory and Problems of Advanced Calculus.* Second Edition. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, (2002).

[8] Christopher N. B. Hammond: *The Case for Raabe's Test.* Mathematics Magazine, Vol. 93, Issue 1, pp. 36–46 (2020). https://doi.org/10.1080/0025570X.1684150.2020

[9] Sarah Fix: *Advanced Tests for Convergence.* (2019). https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2019/Fix-Gordon.pdf

[10] Richard Johnsonbaugh and W. E. Pfaffenberger: *Foundations of Mathematical Analysis.* Dover Publications Inc. (2002).

[11] Kudryavtsev L. D., Kutasov A. D., Chekhlov V. I. and Shabunin M. I.: *Collection of problems in mathematical analysis. Integrals and Series.* Vol. 2, M.: Science. Ch. ed. Phys.-Math. litas. (1986). (Book in Russain)

[12] Francisco J. Freniche: *On Riemann's Rearrangement Theorem for the Alternating Harmonic Series.* The American Mathematical Monthly, Vol. 117, No. 5, pp. 442–448 (2010).

[13] C. C. Cowen, K. R. Davidson and R. P. Kaufman: *Rearranging the Alternating Harmonic Series.* The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 10, pp. 817–819 (1980).

[14] Joseph L. Raabe: *Untersuchungen uber die Convergenz und Divergenz der Reihen*, Zeitschrift fur Physik und Mathematik 10, pp. 41–74 (1832).

[15] M. Duhamel: *Nouvelle regle pour la convergence des series.* J. de mathematiques pures et appliquees, serie 1, tome 4, pp. 214–221 (1839).

[16] Cauchy, Augustin-Louis: *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, I.re Partie. Analyse algébrique. de l'Imprimerie royale (1821).

[17] J. Bertrand: *Regles sur la convergence des series.* Journal de Math. (1) 7, 35–54 (1842).

[18] d'Alembert, J.: *Reflexions fur les Suites divergentes ou convergentes.* Opuscules Mathematiques ou Memoires sur Differens Sujets de Geometrie, de Mechanique, etc. 5: pp. 171–183 (1768).

[19] Thomas Schmelzer and Robert Baillie: *Summing a Curious, Slowly Convergent Series*, The American Mathematical Monthly, 115:6, 525–540 (2008).

[20] Charles H. C. Little , Kee L. Teo , Bruce van Brunt: An Introduction to Infinite Products. Springer Undergraduate Mathematics Series (SUMS) 2022.

[21] ...999.0 Alternative decimal expansion of 1, from Wikipedia, the free encyclopedia. https://www.wikiwand.com/en/0.999...

دليل المصطلحات العلمية

Real infinite series	مُتَسَلْسلَة حَقيقيَّة لانِهَائيَّة
Convergence series	مُتَسَلْسلَة مُتقَارِبَة
Divergence series	مُتَسَلْسلَة مُتَباعدَة
Telescoping series	مُتَسَلْسلَة تلسْكُوبيَّة
Geometric series	مُتَسَلْسلَة هَندسيَّة
Harmonic series	مُتَسَلْسِلَة تَوافُقيَّة
Harmonic product	جداء تَوافُقِي
Decimal series	مُتَسَلْسلَة عشرية
Alternating series	مُتَسَلْسلَة مُتنَاوبَة
Absolutely convergence	تَقارُب بِالإِطْلَاق
Conditionally convergence	تَقارُب شَرطِي
Improper integral	تكَامُل مُعتَل (شاذ)
Convergence Integral	تكَامُل مُتقَارِب
Divergence integral	تكَامُل مُتَباعِد
Sequence	مُتَتَالِيَة
The sequence of partial sums	مُتَتَالِيَة المَجَامِيْع الجُزئيَّة
First comparison test	اختبار المُقَارَنة الأول
Second comparison test	اختبار المُقَارَنة الثاني
Cauchy's Integral test	اختبار كُوشِي التَّكامُلِي
d'Alembert's test	اختبار دَالامْبِيْر
Cauchy's test	اختبار كُوشِي (الجذر النُّونِي)
Raabe test	اختبار رَابْ
Bertrand's test	اختبار برْترَان
Leibniz's test	اختبار لايِبْنِتْز
Koch snowflake	منحني نُدْفَةُ الثَّلج

Function	دَالَّة
Continuous function	دَالَّة مُستَمَرَّة
Decreasing function	دَالَّة مُتَنَاقِصَة
Increasing function	دَالَّة مُتَزَايِدَة
Trigonometric function	دَالَّة مُثَلَّثِيَّة
Hyperbolic function	دَالَّة زَائِدِيَّة (قَطعِيَّة)
Infinite product	جداء لانهَائي (غير منته)